This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

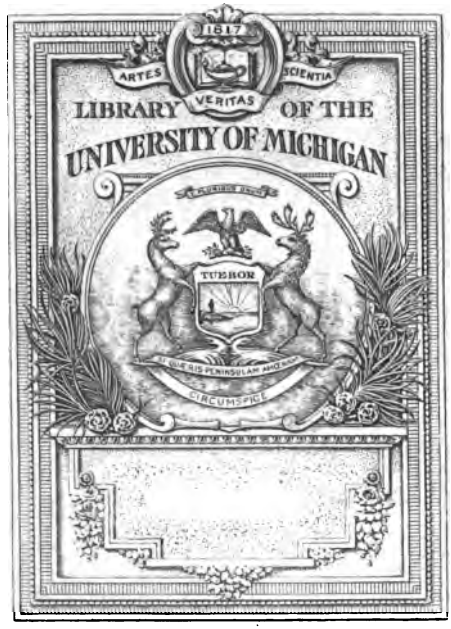
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
1
.J88

JOURNAL

DE

74410

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE

M. J. BOURGET

Agrégé de l'Université, Docteur ès sciences
Directeur des études à l'école préparatoire de Sainte-Barbe

TOME PREMIER.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
58, RUE DES ÉCOLES, 58

1877

AVANT-PROPOS

On connaît toute l'importance des services rendus à l'enseignement par les *nouvelles Annales de Mathématiques* que M. Gerono a fondées. C'est en partie sous l'influence de ce journal que les cours de mathématiques spéciales se sont peu à peu transformés et perfectionnés.

En créant un *Journal de Mathématiques Élémentaires*, notre but est plus modeste, mais il ne nous semble pas moins important.

Les nombreux professeurs qui vivent loin de Paris, ont besoin de connaître les questions proposées dans les concours aux diverses écoles, dans les concours académiques, dans les sessions du baccalauréat ès sciences des diverses facultés. Ils ont intérêt à se communiquer leurs idées sur diverses méthodes d'enseignement, sur quelques points difficiles de leurs cours. Ils aimeraient sans doute aussi savoir comment les choses se passent en Angleterre, en Allemagne, en Italie, etc.; quelles sont les questions proposées aux examens, quels sont les livres suivis, quelles sont les méthodes pédagogiques.

Nous désirons, dans notre publication, répondre à ces besoins et nous pensons que nos collègues de tous les lycées accueilleront notre projet avec sympathie. Nous sol-

licitons d'ailleurs de leur part des conseils et des communications sur les objets de leurs études qui rentrent dans le cadre restreint de notre journal.

Nous espérons aussi que les élèves laborieux y trouveront des stimulants à leur curiosité et des éléments de progrès. Pour eux, nous nous attacherons à ne proposer que des problèmes choisis et analogues à ceux qu'ils ont à résoudre dans les concours. La publication des meilleures solutions sera la récompense de leurs efforts. Ils liront aussi avec intérêt et profit nos recueils des questions les plus importantes faites dans les examens auxquels ils se préparent.

En résumé, nous voulons être utiles à tous les membres de l'enseignement qui s'occupent de mathématiques, en leur fournissant les moyens de communiquer entre eux par un recueil périodique traitant des sujets qui les intéressent. Nous avons la confiance que leurs encouragements ne nous feront pas défaut.

J. Bourget.

Paris, 1er janvier 1877.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES

SUR LES DÉTERMINANTS (1)

L'emploi des déterminants simplifie notablement un grand nombre de théories en mathématiques spéciales; leur usage peut aussi être utilisé en mathématiques élémentaires; nous croyons donc faire une chose agréable aux élèves et aux professeurs, en exposant ici d'une manière simple les principes les plus importants qu'il faut connaître pour se rendre familiers ces précieux instruments de calcul.

Dans un autre article nous montrerons quelques-unes de leurs applications intéressantes.

§ I. — *Déterminant du second ordre.*

1. Définition. — Soit le tableau

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

des quatre quantités a, b, a', b'.

Prenons les deux lettres a, b; formons les deux permutations $a\,b$ — $b\,a$, en mettant le signe — devant la seconde; accentuons la dernière lettre et faisons la somme algébrique des résultats; nous obtiendrons le binome

$$a\,b' - b\,a'$$

C'est ce binome qu'on nomme *déterminant* des quatre éléments a, b, a' b'. On le désigne aussi par le tableau ci-dessus; donc par définition :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' - b\,a'$$

On voit donc que *le déterminant de quatre nombres s'obtient*

(1) Nous devons à M. Diguet, professeur au lycée Saint-Louis, l'idée fondamentale de cette méthode d'exposition.

en faisant la différence des produits des nombres en diagonales sur le tableau des quatre éléments.

$$\text{Exemple : } \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 14 = 16$$

2. Propriétés. — De la définition que nous venons de donner du déterminant du second ordre, résultent immédiatement diverses propriétés très-utiles dans les applications.

1°
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

donc : *le déterminant ne change pas quand on change les lignes en colonnes et réciproquement.*

2°
$$\begin{vmatrix} am & b \\ a'm & b' \end{vmatrix} = m\,(ab' - ba') = m \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am & bm \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

donc : *on multiplie un déterminant par* m *en multipliant tous les nombres d'une ligne ou d'une colonne par* m.

3°
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba' = -(ba' - ab') = -\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix}$$

donc : *un déterminant change de signe quand on intervertit deux lignes ou deux colonnes.*

4°
$$\begin{vmatrix} a+\alpha, & b \\ a'+\alpha', & b' \end{vmatrix} = (a+\alpha)\,b' - b\,(a'+\alpha') = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \alpha' & b' \end{vmatrix}$$

de même :

$$\begin{vmatrix} \alpha+\alpha, & b+\beta \\ a' & b' \end{vmatrix} = (a+\alpha)\,b' - (b+\beta)\,a' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

donc : *si les termes d'une ligne ou d'une colonne sont les sommes de deux nombres, le déterminant est la somme de deux autres faciles à former.*

5°
$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

donc : *Si deux colonnes ou deux lignes deviennent identiques, le déterminant s'annule.*

6° $$\begin{vmatrix} o & b \\ o & b' \end{vmatrix} = o = \begin{vmatrix} o & o \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

donc : *Le déterminant est nul, si les éléments d'une colonne ou d'une ligne sont nuls.*

7° $$\begin{vmatrix} a & b+k \\ a & b'+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & k \\ a & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b' \end{vmatrix}$$

et aussi :

$$\begin{vmatrix} a & a \\ a'+k & b'+k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a \\ k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

donc : *Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont identiques on peut augmenter d'une quantité arbitraire les éléments de la ligne parallèle.*

8° $$\begin{vmatrix} a+b & b \\ a'+b' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b \\ b' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

donc : *Un déterminant ne change pas quand on ajoute ou qu'on soustrait aux éléments d'une colonne ou d'une ligne, les éléments correspondants de la ligne parallèle.*

3. Transformations d'un déterminant. — Les propriétés précédentes permettent de simplifier le calcul des déterminants et de les transformer en d'autres équivalents.

EXEMPLE 1.

Soit le déterminant numérique

$$\begin{vmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{vmatrix}$$

nous pouvons lui faire subir les transformations suivantes :

$$\begin{vmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 1 \\ 27 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \text{ 8e Propr.}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \text{ 7e Propr.}$$

$$= -2$$

EXEMPLE 2.

Nous avons aussi successivement

$$\begin{vmatrix} a & a+r \\ a' & a'+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & r \\ a' & r \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \text{ 8e Propr.}$$

$$= r \begin{vmatrix} a & 1 \\ a' & 1 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; 2^e \text{ Propr.}$$

$$= r \begin{vmatrix} a - a' & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad . \; 7^e \text{ Propr.}$$

$$= r\,(a - a')$$

§ 11. — *Déterminant du troisième ordre.*

4. Définition. — Soit le tableau

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

des neuf éléments $a\,b\,c\;a'\,b'\,c'\;a''\,b''\,c''$.

1° Écrivons avec leurs signes les deux permutations relatives aux deux lettres a b, nous aurons

$$+\,a\,b \qquad -\,b\,a$$

2° Introduisons la troisième lettre c à toutes les places possibles, en ayant soin de changer de signe chaque fois que c avance d'un rang vers la gauche, nous aurons les six résultats suivants :

$$\begin{array}{llll} +\,a\,b\,c & -\,a\,c\,b & +\,c\,a\,b & \text{(venant de } a\,b\text{).} \\ -\,b\,a\,c & +\,b\,c\,a & -\,c\,b\,a & \text{(venant de } b\,a\text{).} \end{array}$$

3° Accentuons une fois la seconde lettre, deux fois la troisième; faisons la somme algébrique des résultats, nous aurons

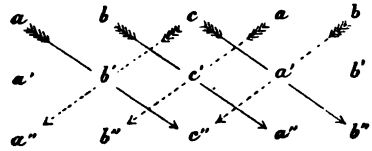
$$a\,b'\,c'' - a\,c'\,b'' + c\,a'\,b'' - b\,a'\,c'' + b\,c'\,a'' - c\,b'\,a''$$

c'est ce polynome qu'on nomme *déterminant* des neuf éléments du tableau ci-dessus. On le désigne par ce tableau, donc, par définition,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\,b'\,c'' - a\,c'\,b'' + c\,a'\,b'' - b\,a'\,c'' + b\,c'\,a'' - c\,b'\,a''$$

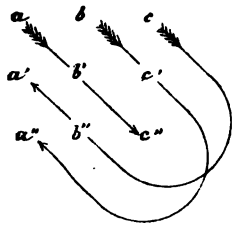
5. Calcul d'un déterminant. — Quand les éléments d'un déterminant sont numériques, ou qu'ils ne présentent pas la disposition symétrique précédente, on en fait le calcul plus simplement par la règle suivante due à Sarrus, ancien professeur à la faculté de Strasbourg.

A la suite des trois colonnes du déterminant écrivons de nouveau les deux premières, nous aurons le tableau suivant



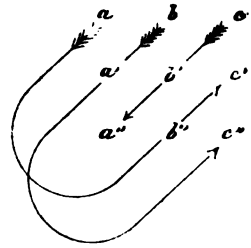
Les trois diagonales marquées par les flèches qui vont de gauche à droite donnent les termes positifs, les trois diagonales marquées par les flèches qui vont de droite à gauche donnent les termes négatifs.

On peut se dispenser d'écrire les colonnes supplémentaires en suivant les flèches courbes des tableaux suivants :



Termes positifs.

$a b' c'' + b c' a'' + c a' b''$



Termes négatifs.

$- a c' b'' - b a' c'' - c b' a''$

La règle de Sarrus est d'un emploi continuel dans les applications numériques ; c'est la plus commode pour le développement direct d'un déterminant.

EXEMPLE.

$$\begin{vmatrix} 1. & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - 6.8 - 2.4.9 - 3.5.7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\ &= 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

6. Propriétés du déterminant du 3me ordre. — La définition donnée du déterminant du 3me ordre va nous permettre de généraliser les propriétés que nous avons reconnues au déterminant du second ordre.

Propriété. 1. — *Un déterminant du 3me ordre est la somme algébrique de trois termes proportionnels aux trois éléments d'une colonne ou d'une ligne; et les multiplicateurs de ces éléments sont les déterminants du second ordre qu'on obtient en effaçant les éléments de la ligne et de la colonne qui se croisent sur l'élément considéré.*

En effet, on a identiquement :

$$\begin{aligned}
a\,b'\,c'' - a\,c'\,b'' + c\,a'\,b'' - b\,a'\,c'' + b\,c'\,a'' - c\,b'\,a'' \\
= +a\,(b'\,c'' - c'\,b'') - a'\,(b\,c'' - c\,b'') + a''(b\,c' - c\,b') \\
= -b\,(a'\,c'' - c'\,a'') + b'\,(a\,c'' - c\,a'') - b''(a\,c' - c\,a') \\
= +c\,(a'\,b'' - b'\,a'') - c'\,(a\,b'' - b\,a'') + c''(a\,b' - b\,a') \\
= +a\,(b'\,c'' - c'\,b'') - b\,(a'\,c'' - c'\,a'') + c\,(a'\,b'' - b'\,a'') \\
= -a'\,(b\,c'' - c\,b'') + b'\,(a\,c'' - c\,a'') - c'\,(a\,b'' - b\,a'') \\
= +a''(b\,c' - c\,b') - b''(a\,c' - c\,a') + c''(a\,b' - b\,a')
\end{aligned}$$

la proposition est donc démontrée.

Remarque. — Les déterminants du second ordre sont appelés *mineurs* relativement aux déterminants du 3me ordre — Les signes des coefficients placés devant les déterminants mineurs sont donnés par le tableau suivant, facile à retenir :

$$\begin{vmatrix} +a & -b & +c \\ -a' & +b' & -c' \\ +a'' & -b'' & +c' \end{vmatrix}$$

Les termes de la diagonale sont positifs; ceux des lignes et des colonnes sont alternatifs.

Propriété 2. — *Le déterminant ne change pas quand on change les lignes en colonnes et réciproquement.*

En effet, d'après la 1re propriété,

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \S\,1$$

mais :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \quad 1^{e}\,\text{Pr.}$$

donc le théorême est démontré.

Propriété 3. — *On multiplie un déterminant par* m *en multipliant par* m *tous les termes d'une ligne ou d'une colonne.*

Le théorême est évident si l'on développe le déterminant suivant les termes de la ligne ou de la colonne où l'on a introduit le facteur *m*.

Propriété 4. — *Le déterminant change de signe quand on intervertit deux lignes ou deux colonnes.*

En effet :

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ c' & b' & a' \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix} = - b \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} c & a \\ c'' & a'' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}$$

$$= b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + b'' \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad . \; . \; \S \; 1$$

mais :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

donc la proposition est démontrée.

Propriété 5. — *Si les termes d'une ligne ou d'une colonne sont chacun sommes de deux éléments, le déterminant peut être regardé comme la somme de deux autres.*

En effet :

$$\begin{vmatrix} a + \alpha & b & c \\ a' + \alpha' & b' & c' \\ a'' + \alpha'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= (a + \alpha) \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - (a' + \alpha') \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + (a'' + \alpha'') \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - \alpha' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + \alpha'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \alpha' & b' & c' \\ \alpha'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad c. \; q. \; f. \; d.$$

On démontrerait semblablement la proposition, si les éléments d'une ligne étaient chacun la somme de deux éléments.

(A suivre.)

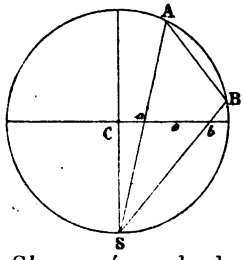
QUESTION DE GÉOMÉTRIE

par A. Morel.

En transportant dans la géométrie de la sphère la définition employée en cosmographie de la projection stéréographique d'une figure tracée sur la sphère, nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

Toute figure dont la projection stéréographique est un cercle est elle-même un cercle sur la sphère.

Pour démontrer ce théorème, nous rappellerons : 1° que si par le sommet d'un cône oblique à base circulaire, et par le centre de la base nous menons un plan perpendiculaire au plan de base, nous déterminons dans le cône deux génératrices, et dans le plan de base un diamètre *ab;* si maintenant nous menons dans ce plan une droite AB telle que l'angle ABS soit égal à *ba*S, le plan perpendiculaire au plan *a*S*b*, mené par la droite AB, s'appelle une section antiparallèle du cône, et le coupe suivant un cercle ayant pour diamètre AB.



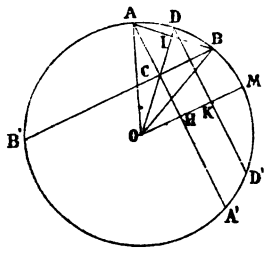
Cela posé, prenons comme plan de la figure le cercle méridien passant par la ligne S*o*; il est facile de voir que, le cône étant coupé par ce plan, perpendiculaire au cercle de base, suivant les génératrices S*a*A, S*b*B, la ligne droite AB est telle que la section perpendiculaire au plan du tableau, ayant pour trace cette droite, est une section antiparallèle du cône, coupant ce cône suivant un cercle dont le diamètre est AB; mais ce même plan coupe la sphère suivant un cercle ayant aussi pour diamètre AB; donc les deux cercles de section de la sphère et du cône par le même plan ont un diamètre commun, et par suite ils coïncident; en d'autres termes, le cône coupe la sphère suivant un cercle, ce qui démontre le théorème.

NOTE SUR LES POLYGONES ÉTOILÉS

par M. **Lidy**, élève de mathématiques à Sainte-Barbe.

Théorème. — *La surface d'un polygone régulier étoilé est égale à son contour apparent multiplié par la moitié de son apothème.*

Soit AB le côté d'un polygone régulier convexe de n côtés. En joignant les points de division de q en q, si q est premier avec n, on forme un polygone régulier étoilé. Du point A partira un côté AA', du point B partira un autre côté BB'; dans chaque triangle OAB la même construction se répète donc, le *contour apparent* du polygone étoilé se composera de n fois la ligne brisée ACB, ou de $2n$ fois AC, nous l'appellerons P'; donc :



$$P' = 2n \,.\, AC.$$

La surface du polygone étoilé se compose évidemment de n fois le quadrilatère ACBO ou de $2n$ fois le triangle ACO, donc :

$$S = 2n \,.\, ACO.$$

Appelons *apothème* la ligne OH, abaissée du centre sur un côté; nous savons que :

$$ACO = \tfrac{1}{2}\, AC \,.\, OH.$$

donc :

$$S = 2n \,.\, AC \,.\, \tfrac{1}{2}\, OH.$$

ou bien :

$$S = P' \,.\, \tfrac{1}{2}\, OH \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Problème. — *Calculer le contour apparent d'un polygone régulier étoilé.*

Du milieu D de l'arc AB, menons une parallèle à AA'. Nous aurons :

$$\text{arc } DMD' = \text{arc } AMA' - 2 \text{ arc } AD$$

ou bien en évaluant les arcs en n^e parties aliquotes de la circonférence :

$$\text{arc DMD}' = q - 1$$

donc l'angle DOM a pour mesure $\frac{q-1}{2}$; donc il est égal à CAB. Les deux triangles ACI, ODK sont donc semblables, donc :

$$\frac{AC}{AI} = \frac{OD}{OK}$$

posons $OD = R$, $AI = \frac{AB}{2} = \frac{C_n}{2}$, $OK = A_{q-1}$

$OH = A_q$; nous aurons :

$$AC = \frac{R\,C_n}{2\,A_{q-1}}$$

donc :

$$P' = \frac{n\,C_n\,R}{A_{q-1}}$$

par suite, en nommant P le périmètre du polygone convexe :

$$P' = \frac{PR}{A_{q-1}}$$

De là on conclut, pour la surface du polygone étoilé

$$S = RP\,\frac{A_q}{2\,A_{q-1}}$$

SUR QUELQUES PERFECTIONNEMENTS

A APPORTER DANS

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

par J. Bourget.

Dans les écoles anglaises, les élèves apprennent par cœur le texte du vieil Euclide. Cette méthode nous paraît un respect exagéré de la tradition et nous croyons qu'en bien des points, les géométries récemment publiées sont préférables à celle de l'illustre auteur ancien.

Nos lecteurs connaissent tous la géométrie de Legendre. Sa rédaction simple et claire l'a rendue en France justement célèbre. La plupart des traités imprimés depuis trente années ont adopté son plan et ses démonstrations. C'est un avantage incontestable, car la géométrie élémentaire est comme un *catéchisme* de principes servant de bases à presque toutes les branches des sciences mathématiques ; l'enchaînement de ces principes doit donc être, en quelque sorte, arrêté définitivement par une entente commune, afin que tous les savants s'accordent et se comprennent.

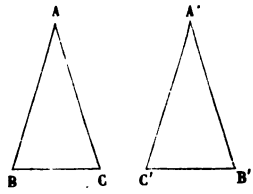
Cette entente n'empêche pas les perfectionnements de détail. Nous nous proposons d'indiquer dans ce journal quelques-uns de ceux que l'on peut introduire, tout en conservant le plan de Legendre, qui nous paraît bon.

Sur l'égalité des triangles.

L'esprit de la géométrie élémentaire consiste à s'élever du particulier au général, tandis que la géométrie analytique procède en sens inverse. En nous conformant à cette méthode,

nous étudierons le triangle isoscèle avant le triangle quelconque. Les deux propositions suivantes reposent directement sur les axiomes et peuvent être placées immédiatement après la proposition IV de Legendre.

Théorème. — *Dans un triangle isoscèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*



A côté du triangle isoscèle donné ABC, plaçons le même triangle retourné A′ C′ B′. Puis prenons ce second triangle et appliquons-le sur le premier en faisant coïncider A′ sur son égal A. Comme, par hypothèse A′ C′ = A′ B′ = A C = A B, le point C′ tombera en B, et le point B′ en C, donc la ligne C′ B′ coïncidera avec B C. Donc C′ = B ; mais C′ et C sont les mêmes angles, donc C = B ; c. q. f. d.

Théorème. — *Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux et le triangle est soscèle.*

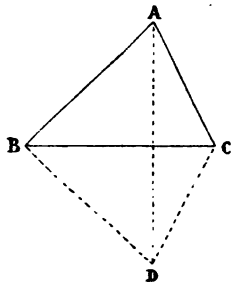
En effet, supposons

$$B = C$$

et plaçons à côté du triangle donné le même triangle retourné A′ C′ B′. Portons maintenant A′ C′ B′ sur A B C de manière à faire coïncider C′ B′ sur B C. Le côté C′ A′ suivra la direction B A, car C′ = C = B par hypothèse ; de même B′ A suivra la direction C A ; donc A′ tombera en A. Donc A′ B′ = A C ; mais A′ B′ et A B sont égaux ; donc A B = A C ; c. q. f. d.

Ces propositions étant démontrées, on peut procéder à l'étude des cas d'égalité des triangles quelconque et traiter comme il suit le troisième cas, sans aucun lemme préliminaire.

Théorème. — *Deux triangles sont égaux, quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*



Supposons :

$$AB = A'B'$$
$$BC = B'C'$$
$$CA = C'A'$$

Plaçons en le renversant le triangle A′ B′ C′ au-dessous de A B C, après avoir fait coïncider B′ C′ avec son égal B C, joignons A D.

Le triangle A C D est isoscèle par hypothèse, donc C A D = C D A. Pour la même raison B A D = B D A. Donc B A D et B D C = B′ A′ C′ sont égaux, comme sommes ou comme différences d'angles égaux.

Donc les deux triangles donnés ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc ils sont égaux, c. q. f. d.

La petite modification que nous conseillons peut être introduite dans le VIIe livre et les triangles symétriques remplacent les triangles retournés dont nous nous sommes servis.

(*A suivre.*)

SUR CET AXIOME :

La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

Ce principe est dû à Archimède; Legendre l'a adopté dans sa géométrie, quoiqu'Euclide ne s'en soit pas servi.

Nous pensons qu'il vaut mieux revenir à Euclide et nous allons en donner les raisons.

1° Ce principe n'est pas irréductible et on peut démontrer rigoureusement, en s'appuyant sur les autres axiomes, qu'une ligne droite est plus petite que toute ligne brisée aboutissant aux mêmes extrémités; il est donc inutile d'ériger en axiome, dans le premier livre, ce théorème dont la démonstration n'offre pas plus de difficulté que celle du théorème suivant : *Par un point hors d'une droite on peut abaisser sur cette droite une perpendiculaire.* Si l'on entrait

dans la voie des propositions évidentes à admettre au début à titre d'axiomes, on pourrait dire qu'on admettra sans démonstration les principes suivants :

Dans un triangle isoscèle les angles à la base sont égaux;

Deux obliques également écartées du pied de la perpendiculaire sont égales;

Une oblique plus écartée qu'une autre du pied de la perpendiculaire est plus longue que cette autre;

Dans un cercle, à des arcs égaux correspondent des cordes égales, etc.;

La science est contraire à cette manière de procéder, bonne pour des praticiens qui voudraient connaître les vérités utiles aux arts du dessin et aux applications scientifiques. Elle cherche au contraire à classer les vérités les unes à la suite des autres en montrant leurs liaisons réciproques et en réduisant au minimum les principes fondamentaux, dont elles dérivent toutes par le raisonnement. Ce sera l'éternel honneur du peuple grec d'avoir conçu l'existence de cette science et de l'avoir créée.

2° Ce principe est obscur dans sa généralité. — On peut bien comparer une ligne droite à une autre, ou à une ligne brisée dont la longueur est facile à définir ; mais comment comparer une ligne droite avec une ligne courbe? — Qu'est-ce que la longueur du chemin formé par la ligne courbe?

On pourra dire qu'on imagine un fil plié suivant la ligne courbe AMB, puis rectifié et que c'est là la longueur de la ligne courbe AMB, mais cette opération matérielle ne peut pas s'introduire dans les raisonnements et il faudra, abstraction faite de la conception d'un fil flexible, dire ce que l'on entendra par *longueur de* AMB, afin qu'on puisse comparer cette longueur à celle de la droite AB, et il faut que la définition soit telle que cette comparaison puisse se faire.

On voit donc que l'axiome d'Archimède doit être rejeté et qu'il faut, pour la clarté de la géométrie et pour la rigueur de ses démonstrations :

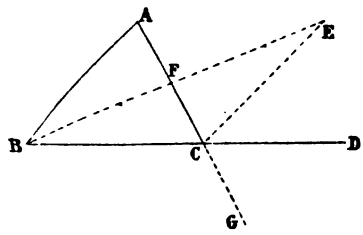
Démontrer, comme Euclide, que la ligne droite est

plus courte que toute ligne brisée aboutissant aux mêmes extrémités;

Donner plus tard une définition de la longueur d'une ligne courbe, permettant de comparer cette longueur avec celle d'une ligne droite.

Voici d'ailleurs la série des théorèmes qui permettent d'établir qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée ayant mêmes extrémités.

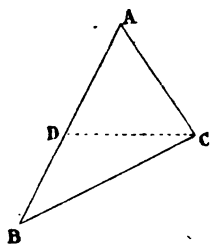
Théorème. — *Dans un triangle, l'angle extérieur est plus grand que chacun des deux intérieurs non adjacents.*



En effet, joignons le point B au milieu F de AC et prolongeons F d'une quantité FE égale à BF. Le point E est dans l'angle extérieur ACD; joignons-le au point C. Les deux triangles ECF, BAF sont égaux; donc ACE = A, donc ACD > A.

On démontrerait de même que BCG est supérieur à B.

Théorème. — *Dans un triangle au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

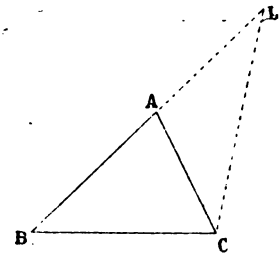


Supposons AB > AC.

Prenons AD = AC, joignons D et C. Le triangle ADC est isoscèle, donc ACD = ADC; mais ADC > B, par le th. précédent; donc ACD et à fortiori C est supérieur à B.

Remarque. — On démontre la réciproque par la réduction à l'absurde.

Théorème. — *Dans un triangle un côté est plus petit que la somme des deux autres.*



Soit BC le plus grand des trois côtés. Prolongeons AB d'une longueur AD = AC. Le triangle DAC est isoscèle, donc ADC = ACD, donc ADC < BCD. Donc, en vertu du théorème précédent :

$$BC < BA + AD$$

ou bien

$$BC < BA + AC$$

c. q. f. d.

Corollaire. — Une ligne droite est moindre que toute ligne brisée aboutissant aux mêmes extrémités. — Démonstration connue.

On se demande quelle simplification résulte de l'admission de ce principe parmi les axiomes, et pourquoi Legendre n'a pas reproduit ces démonstrations d'Euclide, quand il a cherché si longtemps la démonstration du postulatum d'Euclide, aussi évident que le principe d'Archimède?

QUESTIONS D'EXAMENS

Concours 1876

École Polytechnique.

Admissibilité.

1. Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$ pour la surface représentée par l'équation.

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 5x + z = 0.$$

2. On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coëfficient a pour que l'équation

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatres racines réelles.

TRACÉ GRAPHIQUE.

Tore traversé par un trou conique. — *Données :* La ligne de terre est à 13 centimètres au-dessous de l'entête de la feuille de papier. Tore : axe dans le milieu de la feuille $O'\omega = 55$ millim., $O\omega = 125^{mm}$, $O'C' = 70^{mm}$, rayon du cercle méridien $= 50^{mm}$. Cône : cône de révolution dont l'axe est parallèle au plan vertical et rencontre l'axe du tore; le sommet est en (S,S'). $OS = 27^{mm}$; le point S' est sur le cercle; la génératrice S' *a'* qui forme le contour apparent est tangente au cercle méridien en S'; la seconde génératrice de contour apparent S' *b'* est tangente à l'autre méridien en *d'*; l'axe est la bissectrice S' *f'* qui rencontre l'axe du tore en K'. On a figuré une sphère ayant son centre en *f* et inscrite dans le cône; elle touche le contour apparent S' *a'* en *h'*. La projection horizontale est un cercle de rayon égal ayant son centre en *f*. Les deux tangentes, menées à ce cercle par le point S forment le contour apparent horizontal du cône.

Concours d'admission.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun des cercles on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact avec la variable du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux. — Si l'équation se présente sous une forme irrationnelle on aura à la rendre rationnelle.

(Durée de l'épreuve, 4 heures.)

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Représenter par ses projections le solide commun à un cône et à un hyperboloïde qui ont une génératrice commune. Les deux surfaces recouvrent des corps solides. — Ligne de terre à 25 centimètres au-dessus du bord inférieur de la feuille de papier. Hyperboloïde de révolution : axe vertical au milieu de la feuille : centre en (O, O') : $O'a = 70^{mm}$, $Oa = 120^{mm}$. Rayon OD du cercle trace horizontale de la surface $= 110^{mm}$. Rayon OB du cercle de gorge $= 45^{mm}$. La

génératrice ABS, A'O'S' parallèle au plan vertical, sera la génératrice commune.

Cône oblique à base circulaire. — Sa base est dans le plan horizontal ; le sommet est en (S,S') sur la génératrice commune : $aS = 180^{mm}$. Le centre de la base est en C, $CA = 100^{mm}$, $CS = 120^{mm}$. Le cercle de base doit passer au point A ; son rayon est donc 100^{mm}.

On ne considérera, pour la représentation du solide commun que la nappe du cône située entre le sommet et le plan horizontal, mais on prolongera un peu la courbe d'intersection des deux côtés pour bien montrer sa forme; ces prolongements seront faits en pointillé.

N.B. — *Cette composition, annulée pour les candidats de Paris, a été remplacée par la suivante :*

On donne dans le plan horizontal de projection un triangle rectangle ABC : $A = 90°$; $AB = 0^m,08$, $AC = 0^m,06$. Le cercle horizontal ayant A pour centre et AC pour rayon engendre un tore en tournant autour de la parallèle menée par le point B à la droite AC.

On demande de construire l'intersection de ce tore avec la sphère qui, ayant un rayon égal à $0^m,09$ touche le plan horizontal de projection au point I, milieu de BC.

On placera la ligne de terre LT à égale distance des petits côtés de la feuille de dessin, et l'on disposera le triangle ABC de manière que AB et LT soient parallèles et à la même distance du point C.

Dans la mise à l'encre, on représentera la sphère supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore. (*Durée de l'épreuve, 4 heures.*)

École normale supérieure.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY, et telles que la droite PQ qui joint leurs points de contact P et Q avec les deux droites passe par un point fixe donné A : 1° On demande le lieu du point d'intersection de la normale en P à l'une de ces courbes avec le diamètre de la même courbe passant en Q ; 2° On demande de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent

par un point quelconque du plan; 3° On demande l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font un angle donné. — On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45° et où le point donné A est sur la droite OX.

(*Durée de l'épreuve, 6 heures.*)

École centrale.

1re Session. — Juillet 1876.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

On donne deux points O et A, et on considère toutes les paraboles qui ont le point O pour sommet et qui passent au point A. A chacune de ces paraboles, on mène la tangente et la normale au sommet O, et la normale et la tangente au point A. — On demande : 1° Le lieu du point de concours des tangentes au sommet O et au point A; 2° Le lieu du point de concours de la normale au sommet O et de la tangente en A; 3° Le lieu du point de concours de la tangente au sommet O et de la normale en A; 4° Le lieu du point de concours des normales au sommet O et au point A.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

On donne dans le plan horizontal de projection, un cercle qui est tangent à la ligne de terre, et dont le rayon est de $0^m,06$. Ce cercle est la base d'un cône droit dont la hauteur est égale à $0^m,14$. — Soient, A le point du cercle qui est le plus éloigné de la ligne de terre, et B le milieu de l'une des arêtes du cône qui sont parallèles au plan vertical de projection. La droite AB est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point A comme centre, avec un rayon égal à $0^m,04$. On demande :

1° De trouver l'intersection du cône et du cylindre ainsi définis;

2° De représenter le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cylindre.

On tracera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point de l'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre à égale distance des petits côtés du cadre.

Titre : Cône et cylindre.

2e Session. — Octobre 1876.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

On donne dans un plan un angle ROR', un point A sur la bissectrice OX de cet angle, et deux points B et B' placés symétriquement par rapport à OX. On mène, par le point A, une droite quelconque qui rencontre OR en C et OR' en C'. On mène les droites BC, B'C'; ces droites se coupent en un point M. On demande le lieu décrit par le point M quand la droite CAC' tourne autour du point A.

On discutera le lieu en laissant fixes OR, OR' et le point A, et en déplaçant le point B, et par suite le point B'. On indiquera dans quelles régions du plan doit être placé le point B, pour que le lieu soit une ellipse, une hyperbole ou l'une de leurs variétés.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

On donne un triangle rectangle ABC, situé dans le plan vertical de projection; l'hypoténuse BC est verticale. Le sommet B a pour cote 0,08, et le sommet C a pour cote 0,20; l'angle B est égal à 30°. Du point A comme centre, avec un rayon égal à $0^m,04$, on décrit un cercle dans le plan du triangle. — On demande :

1° De trouver l'intersection du cône engendré par le triangle tournant autour de AB, et du tore engendré par le cercle tournant autour de BC;

2° De représenter le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le tore.

On tracera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection du cône et du tore, et la tangente en ce point. — On placera la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,15$ du petit côté inférieur. — Titre : Cône et tore.

École Forestière.

Les deux bases d'un trapèze sont respectivement égales à $247^m,9438$ et à $358^m,6394$; les deux autres côtés ont des longueurs de $141^m,2879$ et $187^m,4456$.

Calculer 1° les distances du point de rencontre des diagonales à chacune des bases, avec sept figures; 2° les angles du trapèze à un centième de seconde près.

(*3 heures.*)

Douze coupes de bois exploitables successivement d'année en année, vaudront 2000 francs au moment de leur exploitation.

On demande combien devrait payer quelqu'un qui les achèterait toutes à la fois dès maintenant, en supposant que le prix total sera payé dans 4 ans en un seul terme et que le taux de l'intérêt soit de 5 %.

Un mobile a parcouru en 7 h. 12′ 27″ et $\frac{93}{100}$ et d'un mouvement uniforme, le côté d'un carré dont la surface est de 13 toises 14 pieds 27 lignes.

On demande quelle est sa vitesse par heure à 0,01 de ligne près.

(*3 heures.*)

École spéciale militaire.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE (*3 heures*).

1re Question.—*Calcul logarithmique.* Dans le triangle ABC dont l'angle A est droit, le côté AB vaut $34828^m,43$; l'angle B vaut 48° 35′ 27″. On demande de calculer : 1° le côté AC; 2° la quantité dont il faudrait augmenter l'angle B, le côté AB restant le même, pour que le côté AC s'accrût de 20 mètres.

2e Question. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

3e Question. — Deux droites AB et A′B′ sont perpendiculaires à un même plan M aux points donnés A et A′. On sait que la longueur de AB est double de celle de A′B′. Par le pied A de AB, on tire dans le plan M une droite AC faisant avec AA′ un angle donné. Cela posé, on demande de trouver sur la droite AC un point d'où l'on verrait les longueurs AB et A′B′ sous des angles égaux. — Discussion sommaire de la question.

Epure (*2 h. 30*).

Une pyramide triangulaire SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal de projection. Le triangle ABC est équilatéral; son sommet A, le plus rapproché de la ligne de terre, est à une distance de 25 millimètres de cette ligne, et le côté AB fait avec ladite ligne de terre un angle de 45°; le côté du triangle équilatéral a une longueur de 90 millimètres, et les trois arêtes SA, SB, SC de la pyramide, dont S est le sommet, ont les longueurs suivantes, savoir : SA = 100 millimètres ; SB = 86 millimètres, SC = 92 millimètres. — Cela posé, on demande :

1° De construire les projections de la pyramide ;

2° De circonscrire une sphère à cette pyramide ;

3° De mener, parallèlement à la face SAC de la pyramide, un plan tangent à la sphère.

École Navale.

1. Calcul numérique de Trigonométrie rectiligne.

Dans un triangle ABC, on donne

$$B = 28^0\ 48'\ 53'',6$$
$$c = 12942^m,65$$
$$a = 8747^m,657.$$

Calculer les angles A et C, le côté *b* et la surface S.

(*Durée de l'épreuve, 1 heure 30.*)

2. Problème d'Arithmétique avec calcul et raisonnement.

On donne la surface d'un cercle.

$$\pi R^2 = 0^{m2},888888$$

On prend $\pi = \frac{22}{7}$

Les trois premiers chiffres de la surface seuls sont exacts, et dans l'expression de R^2, on ne conserve que trois décimales. Démontrer qu'on peut obtenir R à moins de 0,001, et vérifier cette valeur en complétant, d'abord par trois zéros, puis par trois 9 les chiffres nécessaires pour extraire la racine carrée. (*Durée de l'épreuve, 2 heures.*)

3. Question de Géométrie descriptive.

On donne un plan P α P, dont la trace horizontale α P fait un angle de 30 degrés avec la ligne de terre; le plan

est incliné de 53 degrés sur le plan vertical. On donne un point A dans ce plan, distant de $0^m,02$ du plan horizontal, et de $0^m,03$ du plan vertical. Ce point est le centre de la base d'un cône droit, située dans la partie supérieure du plan, et dont le rayon est de $0^m,03$. La hauteur du cône est égale à $0^m,12$. — Trouver les projections du cône.

(*Durée de l'épreuve, 1 heure 30.*)

CONCOURS ACADÉMIQUE D'AIX

Étant donnés deux points fixes A et B et une droite AX partant de l'un d'eux. On considère sur cette droite tous les groupes de points m, m' tels que $Am.\ Am' = a^2$ sur les droites Bm, Bm' on construit les deux points n et n' tels que

$$Bm.\ Bn = Bm'.\ Bn' = b^2$$

et l'on demande :

1° De prouver que toutes les lignes nn' passent par un point fixe C, que l'on propose de déterminer ;

2° Comment varie avec la position de m le produit $Cn.\ Cn'$;

3° Comment se déplace le point C, quand la droite AX tourne autour de A ;

4° Ce que seront l'une par rapport à l'autre les figures décrites par n et n', si m décrit une sphère donnée ;

5° Que deviendraient les résultats si la longueur a était égale à AB.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

par le docteur Henri Süter de Zürich.

INTRODUCTION*

L'histoire de chaque science est le miroir de sa vie la plus intime depuis son origine.

(*) *Note de la rédaction.* — Nous devons la bonne fortune de cette traduction intéressante à M. Melon, professeur de mathématiques à Paris. Il a cherché à se rapprocher autant que possible du texte et c'est ce qui explique le style un peu germanique de cette introduction, qui fait d'ailleurs connaître le but de l'auteur. Dans chacun de nos numéros, nous publierons un fragment de cette histoire qui intéressera certainement tous nos lecteurs.

Je dis à dessein : de sa vie la plus intime ; car l'histoire ne doit pas être une sèche énumération des faits, ni une suite chronologique des événements, ni l'ensemble des biographies des hommes qui se sont distingués dans la science, ni un catalogue de leurs œuvres. Non ; elle doit, dans un développement ordonné, organique, présenter un plan général de l'édifice de la science, en partant de la base et en s'élevant jusqu'aux derniers degrés de son couronnement. Elle ne doit pas, il est vrai, négliger, en les unissant convenablement à l'ensemble, d'introduire en leur temps et en leur lieu, les divers ouvriers qui ont travaillé à cette œuvre, et d'assigner à chacun d'eux la place qui lui appartient soit comme fondateur soit comme auxiliaire de la science. Alors seulement l'histoire se trouve à la hauteur des obligations qu'on lui impose et qu'on doit lui imposer ; alors au lieu de raconter seulement, l'histoire enseigne, pour ainsi dire, la science ; alors, en un mot, elle est la biographie de la science elle-même.

La plus difficile à aborder, mais aussi la plus sublime sphère de l'activité de l'esprit humain est sans contredit l'histoire de son développement même : « *S'il existe une science* » *de prévoir les progrès de l'espèce humaine, de les diriger, de* » *les accélérer, l'histoire de ceux qu'elle a faits en doit être* » *la base première* », dit Condorcet dans son ouvrage de génie (1). Des efforts puissants ont déjà été tentés dans cette voie, et de très-grands esprits se sont appliqués à cette question élevée. Pourtant à toutes les époques elle n'a été traitée qu'imparfaitement ; et certes elle deviendra tous les jours plus étendue, et il sera plus difficile, impossible même de l'embrasser dans son ensemble ; car où est aujourd'hui l'homme qui saurait se rendre maître des immenses matériaux de toutes les sciences ?

C'est pourquoi, si l'on veut cependant entreprendre cette tâche et l'accomplir dans une certaine mesure, il faut nécessairement n'embrasser dans chaque étude historique qu'un même ordre de productions humaines ; c'est-à-dire qu'après

(1) Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain.

avoir séparé, classé les diverses sciences, on doit traiter leur histoire isolément. On obtient ainsi une image en fragments, il est vrai, mais du moins complète et fidèle, du développement de l'esprit humain.

Nous ne voulons pas nous engager dans de plus longues discussions sur l'utilité de l'histoire des sciences. Énonçons seulement cette vérité : De même qu'on ne peut contester la haute influence exercée sur le développement de l'esprit humain par l'histoire de l'humanité, de ses actions, de ses mœurs, de ses institutions, de même on doit reconnaître que l'histoire de chaque science jouit, dans sa sphère plus limitée, d'un semblable pouvoir et de grands avantages. L'histoire aide, à un très-haut degré, à la conception de la science elle-même. Elle apprend à reconnaître ce qui a été fait jusqu'ici, à comprendre ce qui se fait actuellement, et elle facilite la découverte de ce qui reste à faire.

Et précisément les Mathématiques sont, de toutes les sciences, celles qui se prêtent le mieux à une exposition historique. En effet, si elles aussi ont eu des commencements obscurs chez les divers peuples de l'antiquité, et s'il est difficile d'assigner des limites précises à leur origine et à leurs progrès, du moins leur cours se laisse, peu après, décrire avec une vérité et une certitude qu'on ne peut atteindre dans aucune autre science. Cette circonstance tient à l'essence même des Mathématiques. Elles constituent la science de la vérité rigoureuse, de la loi irréfragable dans le fond et dans la forme. Leur marche sûre et ferme est toujours dirigée en avant, jamais en arrière. Je rapporte ici les paroles de Montucla (1) à ce sujet ; elles sont formelles et signalent bien clairement ce qui frappe le plus dans le développement historique des Mathématiques : — « *On les a* » *vues, il est vrai, souvent marcher avec lenteur ; elles ont été* » *quelquefois et même des siècles entiers, stationnaires ; je veux* » *dire comme arrêtées dans leur marche, et ne faisant aucun* » *progrès sensible ; mais on les a vues moins que toute autre,* » *rétrograde, c'est-à-dire prenant l'erreur pour la vérité, car*

(1) Histoire des mathématiques.

» *dans la marche de l'esprit humain, une erreur est un pas en* » *arrière.* »

Mais il est digne de remarque que précisément l'histoire de cette science a été, à toutes les époques, la plus négligée. Ce qui a été fait de ce côté, avant le milieu du XVIIIe siècle, ne répond nullement à nos désirs, à nos exigences. D'abord les traités historiques de mathématiques de cette époque ne s'appliquent pour la plupart qu'à des branches isolées des Mathématiques, le plus souvent à l'astronomie ; quelquefois même ils ne sortent pas d'une époque déterminée et restreinte. Ensuite ces ouvrages ne sont guère, en moyenne, qu'une simple énumération chronologique de savants et une liste de leurs œuvres. Sont à mentionner à cet égard :

Vossius, *de Scientiis mathematicis, 1650.*

Deschalles, *de Matheseos progressu et illustribus mathematicis, 1690.*

Wallis, *Tractatus algebræ historicus et praticus, 1684.*

Cassini, *de l'Origine et du progrès de l'astronomie, 1693.*

Le meilleur ouvrage de cette période, et qui parut d'ailleurs un peu plus tard, est dû à Weidler: *Historia astronomiæ, 1741.*

Il contient au commencement une peinture assez vivante de l'astronomie des peuples anciens, et il est écrit avec une grande érudition. Vers la fin, il n'est guère meilleur que tous les autres. Il est vrai que plusieurs considérations doivent nous rendre indulgents ; l'art d'écrire l'histoire (l'historiographie) était, en général,à peine à sa naissance ; dans les autres domaines l'histoire ne procédait guère qu'à un point de vue chronologique ; enfin les données ou documents sur l'antiquité ou même sur le moyen âge n'étaient que bien rarement à la disposition des savants d'alors.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. — Déterminer un triangle dont les côtés soient des multiples du rayon du cercle inscrit. — Démontrer que, le rayon étant pris pour unité, le cube du nombre qui représente la surface est égal à la somme des cubes des trois côtés.

2. — Un triangle rectangle ABC est équivalent au rectangle des deux segments Bα, Cα faits sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

3. — Trouver le minimum de $\frac{x^m}{y^n}$, pour $m > n$, sachant que $x - y = a$.

4. — Étant donné un tronc de prisme droit, on demande de mener par l'une des arêtes un plan qui le partage en deux parties proportionnelles à des nombres donnés.

(*Éc. Forest, 1869.*)

5. — AB est un diamètre d'un cercle, P un point du cercle, PM la perpendiculaire abaissée sur AB. — Sur AM et BM comme diamètres, on décrit deux cercles rencontrant AP et BP respectivement en Q et en R. Démontrer que QR touche les deux cercles.

6. — Si l'on considère les triangles formés par l'un des côtés d'un polygone et les prolongements des côtés adjacents, les angles de ces triangles formés par les prolongements des côtés ont une somme égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins quatre.

7. — On donne un secteur circulaire dont l'angle au centre est 2α, et l'on demande d'inscrire dans ce secteur, en plaçant deux sommets sur l'arc, un rectangle dont la surface soit maxima. (*St-Cyr, 1869.*)

8. — Si l'on ajoute termes à termes deux progressions géométriques, qui n'ont pas même raison, les résultats ne forment pas une progression, mais chaque terme pourra se déduire des deux précédents, en les multipliant par des nombres constants et ajoutant les résultats.

9. — Deux cercles dont les rayons sont r et r' sont tangents extérieurement. On leur mène une tangente commune extérieure, puis on détermine un cercle qui touche cette droite et les deux cercles donnés. Démontrer que le rayon x de ce cercle est donné par la relation

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}$$

10. — Soit un triangle ABC, inscrit dans un cercle; par un

point K quelconque, pris sur le cercle, on élève des perpendiculaires aux droites KA, KB, KC, lesquelles coupent BC, CA, AB, respectivement en D, E, F. Démontrer que les points D, E, F, sont sur une droite passant par le centre du cercle.

11. — Résoudre l'équation

$$x^x - x^{-x} = 3\ (1 + x^{-x}).$$

12. — Résoudre le système

$$\frac{a^3\ x}{y^2\ z^2} = \frac{b^3\ y}{z^2\ x^2} = \frac{c^3\ z}{x^2\ y^2} = 1$$

13. — Étant donné un point P sur la bissectrice OX d'un angle AOB, par le point P on mène une droite CPD rencontrant en C le côté OA, et en D, le côté OB. On abaisse les perpendiculaires CF, DE sur la bissectrice, puis, prenant le milieu I de OP, on décrit sur IE comme diamètre une circonférence qui coupe en M la perpendiculaire CF. Trouver le lieu géométrique du point M lorsque CD tourne autour du point P.

14. — Soit ABC un triangle; ABDE, ACFG, BCHK sont les carrés construits sur les côtés; on connaît les longueurs des droites EG, FH, KD, et l'on demande de construire le triangle ABC.

15. — $a^x\ b^y\ c^z$ est minimum, et $(x+1)\ (y+1)\ (z+1)$ est constant. Trouver une relation entre x, y et z.

16. — Un angle droit inscrit dans un cercle détermine trois arcs, à chacun desquels on mène une tangente, sous la condition que le point de contact soit le milieu des segments interceptés, sur sa direction, entre les côtés de l'angle ou leurs prolongements : les trois tangentes déterminent par leur rencontre un triangle équilatéral.

N. B. — Nous ne proposons dans le journal que des problèmes dont nous avons la solution et que nous savons être au niveau des classes de mathématiques élémentaires. Les solutions données par les élèves seront seules imprimées ou mentionnées. Nous prions les auteurs de soigner particulièrement leur rédaction.

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

PARIS. — IMP. A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20. — 17410-6.

PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES

SUR LES DÉTERMINANTS

Propriété 6. — *Un déterminant est nul si deux colonnes ou deux lignes sont identiques.*

En effet :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ a' & b' & a' \\ a'' & b'' & a'' \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a' & a' \\ a'' & a'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & a \\ a'' & a'' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & a \\ a' & a' \end{vmatrix} = 0$$

c. q. f. d.

La démonstration serait semblable si deux lignes étaient identiques.

Propriété 7. — *Un déterminant est nul si les éléments d'une colonne ou d'une ligne sont nuls.*

La proposition est évidente, si l'on ordonne le déterminant par rapport aux éléments de cette colonne ou de cette ligne.

Propriété 8. — *Si un déterminant renferme une ligne ou une colonne à éléments identiques, on peut ajouter une quantité arbitraire aux éléments d'une ligne parallèle, sans changer le déterminant.*

En effet :

$$\begin{vmatrix} a+k & b & c \\ a'+k & b' & c \\ a''+k & b'' & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c \\ a'' & b'' & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & b & c \\ k & b' & c \\ k & b'' & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c \\ a'' & b'' & c \end{vmatrix} \text{ c. q. f. d.}$$

La démonstration serait semblable si les éléments d'une ligne étaient identiques.

Propriété 9. — *Un déterminant ne change pas quand on ajoute aux éléments d'une colonne ou d'une ligne, les éléments*

d'une ligne parallèle multipliés respectivement par une même quantité.

En effet :

$$\begin{vmatrix} a+mc & b & c \\ a'+mc' & b' & c' \\ a''+mc'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} c & b & c \\ c' & b' & c' \\ c'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \text{ c.q.f.d.}$$

Propriété 10. — *Un déterminant est nul, s'il renferme deux lignes ou deux colonnes à éléments identiques.*

En effet :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b' & c \\ a & b'' & c \end{vmatrix} = ac \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b' & 1 \\ 1 & b'' & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6^e \text{ Propr.}$$

7. Application. — Les propriétés précédentes ont de nombreuses applications dans le calcul et les transformations des déterminants.

EXEMPLE 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9^e \text{ Propr.}$$

EXEMPLE 2.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'-x & y'-y & 0 \\ x''-x & y''-y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'-x & y'-y \\ x''-x & y''-y \end{vmatrix}$$

EXEMPLE 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 \\ b-c & b^2-c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & b+c \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Remarque. — On voit que toutes les propriétés du déterminant du 3e ordre sont des corollaires de sa décomposition en déterminants mineurs du second ordre.

§ III. — *Déterminant du quatrième ordre.*

8. Définition. — Écrivons avec leurs signes les diverses permutations des trois lettres a, b, c, dont nous avons tiré le déterminant du 3e ordre, nous aurons

$$+abc \quad -acb \quad +cab \quad -bac \quad +bca \quad -cba$$

Introduisons la lettre d à toutes les places possibles dans chacune de ces permutations, en ayant soin de changer de signe chaque fois que d avance d'un rang vers la gauche, nous aurons les 24 résultats suivants :

$$\begin{array}{cccccc}
+abcd & -acbd & +cabd & -bacd & +bcad & -cbad \\
-abdc & +acdb & -cadb & +badc & -bcda & +cbda \\
+adbc & -adcb & +cdab & -bdac & +bdca & -cdba \\
-dabc & +dacb & -dcab & +dbac & -dbca & +dcba
\end{array}$$

Chacune des colonnes correspond à l'une des permutations ci-dessus.

Mettons maintenant un accent à la seconde lettre, deux à la troisième, trois à la quatrième ; faisons la somme algébrique des résultats, nous aurons le déterminant des 16 quantités $a, b, c, d, \quad a', b', c', d', \quad a'', b'', c'', d'', \quad a''', b''', c''', d'''$, qu'on désigne encore par la notation

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

Nous avons donc par définition :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} =$$

$$\left\{\begin{array}{llll}
\quad a\,b'\,c''\,d''' & -a\,c'\,b''\,d''' & +c\,a'\,b''\,d''' & -b\,a'\,c''\,d''' \\
+b\,c'\,a''\,d''' & -c\,b'\,a''\,d''' & & \\
-a\,b'\,d''\,c''' & +a\,c'\,d''\,b''' & -c\,a'\,d''\,b''' & +b\,a'\,d''\,c''' \\
-b\,c'\,d''\,a''' & +c\,b'\,d''\,a''' & & \\
+a\,d'\,b''\,c''' & -a\,d'\,c''\,b''' & +c\,d'\,a''\,b''' & -b\,d'\,a''\,c''' \\
+b\,d'\,c''\,a''' & -c\,d'\,b''\,a''' & & \\
-d\,a'\,b''\,c''' & +d\,a'\,c''\,b''' & -d\,c'\,a''\,b''' & +d\,b'\,a''\,c''' \\
-d\,b'\,c''\,a''' & +d\,c'\,b''\,a''' & &
\end{array}\right\}$$

On voit que le développement d'un déterminant du quatrième ordre est une opération laborieuse, mais les propriétés dont il jouit permettent de simplifier cette opération; il importe donc de les connaître.

9. Propriétés du déterminant du quatrième ordre. — Nous avons vu que les propriétés du déterminant du troisième ordre sont des conséquences de sa décomposition en mineurs du second ordre. Nous allons montrer que celui du quatrième ordre est aussi décomposable en mineurs du troisième ordre, suivant la même règle. Il en résultera que toutes les propriétés vraies pour le déterminant du troisième ordre s'étendent à celui du quatrième.

Or 1° Il est évident, d'après la loi de formation donnée ci-dessus, que

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = .$$

$$d''' \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} - d'' \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} + d' \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c''' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}$$

2° Supposons que l'on veuille ordonner suivant les termes de la ligne a, b, c, d. Nous développerons les trois premiers mineurs suivant les termes a, b, c des premières lignes et nous aurons, en désignant pour abréger les déterminants par leur diagonale mise entre parenthèses,

$$\begin{aligned}
(a\ b'\ c''\ d''') &= d'''\ [a\ (b'\ c'') - b\ (a'\ c'') + c\ (a'\ b'')] \\
&\quad - d''\ [a\ (b'\ c''') - b\ (a'\ c''') + c\ (a'\ b''')] \\
&\quad + d'\ [a\ (b''\ c''') - b\ (a''\ c''') + c\ (a''\ b''')] \\
&\quad - d\ (a'\ b''\ c''') \\
&= a\ [d'''\ (b'\ c'') - d''\ (b'\ c''') + d'\ (b''\ c''')] \\
&\quad - b\ [d'''\ (a'\ c'') - d''\ (a'\ c''') + d'\ (a''\ c''')] \\
&\quad + c\ [d'''\ (a'\ b'') - d''\ (a'\ b''') + d'\ (a''\ b''')] \\
&\quad - d\ (a'\ b''\ c''') \\
&= a\ (b'\ c''\ d''') - b\ (a'\ c''\ d''') + c\ (a'\ b''\ d''') \\
&\quad - d\ (a'\ b''\ c''')
\end{aligned}$$

D'où l'on voit que le déterminant du quatrième ordre se décompose en mineurs du troisième ordre, suivant la même

règle qui sert à décomposer le déterminant du troisième en mineurs du second.

Donc le déterminant du quatrième ordre, et par suite le déterminant d'un ordre quelconque, jouit de toutes les propriétés du déterminant du troisième.

(*A suivre.*)

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LES

MÉTHODES DE DÉMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES

ET PARTICULIÈREMENT EN GÉOMÉTRIE.

Il est bon que les élèves aient des idées générales précises sur les méthodes de démonstration ; ils suivent plus facilement les détails d'un théorème et ils peuvent abréger le travail relatif aux propositions contraires, réciproques, etc... Nous pensons donc que les principes philosophiques qui suivent ne seront pas sans utilité. (1)

I. — On distingue ordinairement deux parties dans l'énoncé d'une *proposition;* l'une nommée *hypothèse* est une supposition *faite* sur un certain *sujet* considéré comme principal, l'autre nommée *conclusion* est la conséquence de cette supposition.

La *contraire* d'une proposition est celle dans laquelle l'*hypothèse* et la *conclusion* sont contraires à l'hypothèse et à la conclusion de la première proposition.

La *réciproque* d'une proposition est une autre proposition dans laquelle le *sujet* restant le même que dans la première, on prend pour hypothèse la conclusion de la première et pour conclusion l'hypothèse de la première. Par opposition, la proposition qui a une réciproque s'appelle *proposition directe.*

Exemples. — *Si dans un cercle deux arcs sont égaux, les cordes qui leur correspondent sont égales.* Dans cette proposition le cercle est le *sujet;* l'égalité des arcs est *l'hypothèse,* l'égalité des cordes est la *conclusion.*

La proposition contraire est celle-ci : *Dans un cercle* (sujet),

(1) Ces généralités sont tirées de la Géométrie de Vincent.

si deux arcs sont inégaux (hypothèse contraire), *les arcs correspondants sont inégaux* (conclusion contraire).

La proposition réciproque est celle-ci : *Dans un cercle* (sujet) *si deux arcs sont égaux* (hypothèse), *les cordes correspondantes sont égales* (conclusion).

II. — Toutes les réciproques ne sont pas vraies; par exemple : *Si deux cercles ont deux points communs, la distance des centres est moindre que la somme des rayons.* La réciproque de cette proposition serait celle-ci : *Si pour deux cercles la distance des centres est moindre que la somme des rayons, ils ont deux points communs.* — Elle est fausse.

III. — Il est possible que, dans une proposition l'hypothèse se compose de plusieurs hypothèses partielles. Une réciproque de la proposition donnée sera une autre proposition qui aura pour conclusion l'une de ces hypothèses partielles et dont l'hypothèse sera composée des hypothèses partielles restantes et de la conclusion de la première proposition. On conçoit donc qu'une proposition ait plusieurs réciproques.

Il en sera de même si la proposition a plusieurs conclusions partielles, formant la conclusion générale.

Exemple : *Si une droite est perpendiculaire à un plan et que l'on conduise un second plan par cette droite, il sera perpendiculaire au premier.*

Cette proposition a deux hypothèses et une conclusion. Voici les deux réciproques :

Si une droite est perpendiculaire à un plan et que par un point de cette droite on mène un second plan perpendiculaire au premier, il contiendra entièrement la droite.

Si un plan est perpendiculaire à un autre et que dans ce plan on mène une perpendiculaire à l'intersection, elle sera perpendiculaire à l'autre.

IV. — On peut souvent reconnaître l'exactitude des réciproques au moyen des principes suivants :

1er Principe. — *Si une proposition et sa contraire sont vraies en même temps, la réciproque est nécessairement vraie.*

Ainsi on sait que *tout point pris sur la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés*, et en même temps que *tout point pris en dehors de la bissectrice est à inégale distance des*

côtés. On en conclut immédiatement que *tout point à égale distance des côtés est sur la bissectrice*. — C'est la réciproque de la première proposition.

2e Principe. — *Si une proposition et sa réciproque sont vraies, la contraire est vraie aussi.*

On sait, par exemple, que *tout point pris sur la perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est à égale distance des extrémités*, et que, réciproquement, *tout point à égale distance des extrémités d'une droite est sur la perpendiculaire élevée au milieu.*

Il en résulte que *tout point en dehors de la perpendiculaire est à inégale distance des extrémités.*

3e Principe. — *Quand on a fait sur un sujet donné toutes les hypothèses possibles, si ces hypothèses ont conduit à des conséquences essentiellement distinctes, et telles que chacune exclue les autres, les réciproques des propositions établies sont vraies.*

Le raisonnement employé pour les démontrer est celui de la *Réduction à l'absurde*. On tombe en effet sur une absurdité en supposant la réciproque fausse.

Exemple : Soient deux cercles sur un plan. On peut faire sur ce sujet complexe cinq hypothèses, qui donnent lieu à cinq propositons :

1° S'ils sont extérieurs, la distance des centres est supérieure à la somme des rayons : $D > R + r$

2° S'ils sont tangents extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons : $D = R + r$

3° S'ils se coupent, la distance des centres est à la fois, inférieure à la somme et supérieure à la différence des rayons : $D < R + R$ *et* $D > R - r$

4° S'ils sont tangents intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons : $D = R - r$

5° S'ils sont intérieurs, la distance des centres est moindre que la différence des rayons : $D < R - r$

Les cinq conclusions étant distinctes, les réciproques sont vraies; ainsi, en particulier : *Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les cercles sont tangents intérieurs*; en effet, s'ils n'étaient pas tangents intérieurement la distance des centres aurait une autre relation avec les deux rayons, ce qui est contraire à l'hypothèse.

4e Principe. — *Lorsque dans une figure il existe quelque ligne (droite ou cercle) satisfaisant à plus de conditions qu'il n'en faut pour la déterminer complétement, toute ligne de même nature que la première (droite ou cercle) sera identique avec celle-ci, si parmi ces conditions elle en remplit un nombre suffisant pour la déterminer.*

Ainsi la médiane d'un triangle isoscèle est bissectrice de l'angle au sommet et perpendiculaire sur la base. Or deux conditions détermineront cette droite, donc on peut formuler immédiatement les réciproques que voici :

Si du sommet d'un triangle isoscèle on abaisse une perpendiculaire sur la base, elle la divise en deux parties égales, ainsi que l'angle au sommet.

Si l'on mène la bissectrice de l'angle au sommet, elle sera perpendiculaire sur le milieu de la base.

Si par le milieu de la base, on élève une perpendiculaire, elle passera par le sommet et divisera l'angle du sommet en deux parties égales.

V. — Pour résoudre une question on peut suivre deux marches, l'*analyse* et la *synthèse*.

L'*analyse* est la méthode par laquelle on ramène une question A à résoudre, à une autre B, celle-ci à une autre C, etc... jusqu'à ce que l'on tombe sur une question D, par exemple, que l'on sait résoudre.

La synthèse est la méthode inverse. Par la question connue D on arrive à résoudre la question C, de celle-ci on passe à la question B, enfin l'on résout la question proposée A.

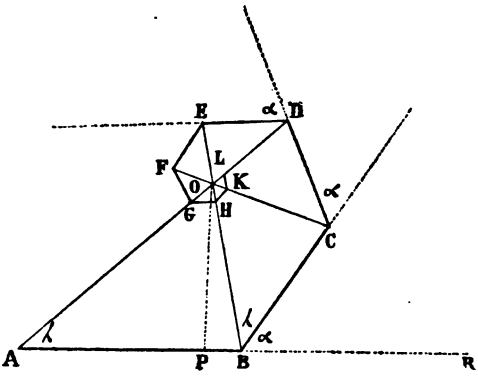
L'analyse est évidemment la méthode d'invention. La synthèse est souvent commode dans l'enseignement, elle évite à l'élève le passage par les tâtonnements qui ont précédé une solution. C'est la méthode suivie dans l'exposition de la plupart des sciences. J. B.

PROBLÈME DU MYOSOTIS

par **H. Dellac**, professeur au lycée de Marseille.

On construit un contour polygonal convexe dont les côtés successifs forment une progression géométrique décroissante et

font entre eux un angle constant; démontrer que l'extrémité de ce contour tend vers un point limite et trouver la distance de ce point au point de départ.



1° Soit ABCD... le contour; soit AB $= a$ le premier côté, soit m la raison de la progression, de sorte que BC $= ma$, CD $= m^2a$, DE $= m^3 a$...; et soit α l'angle constant que fait chaque côté avec le prolongement du précédent.

Supposons d'abord α commensurable avec π, et pour fixer les idées supposons $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{3}$ de sorte que $3\alpha = \pi$.

Le côté BC fait avec AB un angle α, le côté CD fait avec AB un angle 2α, le côté DE fait un angle 3α. Comme $3\alpha = \pi$, le côté DE est parallèle à AB, et c'est évidemment le premier côté du contour qui le soit.

Je dis que le troisième sommet à partir de D sera sur la ligne AD. En effet, les deux polygones ABCD, DEFG sont semblables comme ayant tous leurs angles égaux deux à deux, à l'exception de deux, et les côtés homologues qui comprennent ces angles proportionnels, le rapport de similitude étant m^3. Donc l'angle BAD=EDG. Comme DE est parallèle à AB on a :

$$\text{EDA} = \text{BAD} = \text{EDG}$$

ce qui exige que les deux lignes DG et DA se confondent, et le point G se trouve bien sur DA.

On démontrera de même que le sommet suivant H se trouve sur la ligne BE, et le sommet suivant K sur CF; puis le sommet suivant L reviendra sur AD, et ainsi de suite.

Ainsi tous les côtés du contour sont distribués sur trois droites.

Je dis que ces droites se coupent en un même point. Soit O le point d'intersection de AD avec BE. Les deux triangles AOB, DOE sont semblables comme équiangles : donc $\frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB} = m^3$. De même si je désigne par O′ le point d'intersection de BE avec CF B, j'aurai $\frac{O'E}{BE} = \frac{EF}{OC} = m^3$. Ainsi les points O et O′ partagent BE dans le même rapport, et par suite ils se confondent.

Les deux polygones ABCD, BCDE sont évidemment semblables : donc l'angle CBE = BAD = λ. Mais l'angle extérieur RBE ou $\alpha + \lambda$ = BAO + AOB ou λ + AOB. Donc l'angle AOB égale α. On démontrerait de même que BOC = α et ainsi de suite.

Ainsi tous les sommets du contour se trouvent distribués sur trois lignes qui concourent en un même point O et font entre elles des angles égaux à α.

Les deux triangles AOB, BOC sont semblables comme équiangles ; donc

$$\frac{BO}{AO} = \frac{BC}{AB} = m$$

d'où BO = m . AO ; de même CO = m . BO.....

On voit donc que les distances des sommets du contour au point O forment une progression géométrique décroissante, et par conséquent ont pour limite zéro ; donc l'extrémité du contour considéré a pour limite le point O.

Si l'on avait $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, tous les sommets du contour seraient distribués sur q droites concourantes, et formant entre elles des angles égaux à α.

Si l'angle α était incommensurable avec π, on ne trouverait plus dans le contour des côtés parallèles ; néanmoins l'extrémité du contour continuerait à avoir pour limite le point O, d'où les côtés successifs AB, BC sont vus sous l'angle donné α.

S'il s'agit de construire géométriquement ce point O, on décrit sur AB et sur BC deux segments capables de l'angle α,

et leur intersection donne le point O, et, par suite, la longueur demandée OA.

Si on considère tous les contours qui ont même base AB, même angle α, mais des valeurs différentes de m, le lieu du point O sera le segment capable de l'angle α décrit sur AB : lorsque le rapport $\frac{BC}{AB} = m$ varie de zéro à 1, le point O parcourt la moitié de ce segment à partir de B.

Considérons tous les contours qui ont même base AB, même rapport de similitude m, et des valeurs de α différentes. Comme on a $\frac{OB}{OA} = m$, le lieu du point O sera une circonférence ayant son centre sur AB.

II. — Cherchons maintenant la valeur de $AO = z$. Dans le triangle ABO on a $AB = a$, $AO = z$, $BO = mz$, donc

$$a^2 = z^2 + m^2z^2 - 2mz^2 \cos \alpha$$

$$\text{d'où } z^2 = \frac{a^2}{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}$$

On peut déterminer la position du point O par son abscisse $AP = x$ et son ordonnée $OP = y$.

Dans le triangle rectangle AOP, on a

$$x = z \cos \lambda \,.\, y = z \sin \lambda.$$

Or le triangle AOB nous donne :

$$\frac{\text{Sin}\,\lambda}{\text{Sin}\,\alpha} = \frac{mz}{a}$$

$$\text{d'où } \sin \lambda = \frac{m \sin \alpha}{a} z$$

$$m^2z^2 = a^2 + z^2 - 2az \cos \lambda$$

$$\text{d'où } \cos \lambda = \frac{a^2 + z^2 - m^2z^2}{2az}$$

$$\text{donc : } x = \frac{a^2 + z^2 - m^2 z^2}{2a} = a \frac{1 - m \cos \alpha}{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}$$

$$y = \frac{m \sin \alpha}{a} z^2 = a \frac{m \sin \alpha}{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}$$

III. — Puisque AO est la résultante du contour ABCDE.., sa projection sur un axe quelconque sera égale à la somme algébrique des projections des côtés du contour. On a donc :

$$x = a + am \cos \alpha + am^2 \cos 2\alpha + am^3 \cos 3\alpha + \ldots$$
$$y = am \sin \alpha + am^2 \sin 2\alpha + am^3 \sin 3\alpha \ldots.$$

Comme nous avons déjà trouvé les valeurs de x et de y, on obtient les formules suivantes :

$$1 + m \cos \alpha + m^2 \cos 2\alpha + m^3 \cos 3\alpha + = \frac{1 - m \cos \alpha}{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}$$

$$m \sin \alpha + m^2 \sin 2\alpha + m^3 \sin 3\alpha + \ldots = \frac{m \sin \alpha}{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}$$

Ces formules s'obtiennent ordinairement par l'emploi des quantités imaginaires.

IV. — Si on prend pour pôle le point O et pour axe polaire une parallèle à AB, les sommets du contour se trouvent évidemment sur une spirale de la forme

$$\rho = Ae^{\mu\theta}$$

Il faut déterminer les constantes de manière que pour une valeur connue de θ que je désignerai par θ_0 on ait :

$\rho = OA$, et pour $\theta = \theta_0 + \alpha$, $\rho = OB$. Ainsi :

$$\frac{a}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}} = Ae^{\mu\theta_0}$$

$$\frac{ma}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}} = Ae^{\mu(\theta_0 + \alpha)}$$

d'où $m = \dfrac{e^{\mu(\theta_0 + \alpha)}}{e^{\mu\theta_0}} = e^{\mu\alpha}$

et par suite : $\mu = \dfrac{\log m}{\alpha}$

Pour A on a : $A = \dfrac{ae^{-\mu\theta_0}}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}}$

Il faut remarquer que m étant plus petit que 1, log m et par suite μ sont négatifs.

Enfin pour que l'axe polaire soit parallèle à AB, il faudra donner à θ_0 la valeur $\pi + \lambda$, et nous avons déjà trouvé

$$\text{Sin } \lambda = \frac{m \sin \alpha}{a} \; z = \frac{m \sin \alpha}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}}$$

$$\text{Cos } \lambda = \frac{a^2 + (1 - m^2)\, z^2}{2az} = \frac{1 - m \cos \alpha}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}}$$

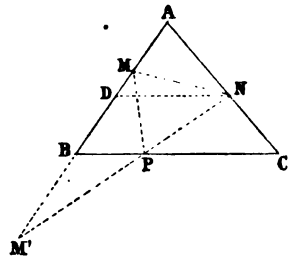
$$\text{d'où tang } \lambda = \frac{m \sin \alpha}{1 - m \cos \alpha}$$

et il faudra prendre pour λ le plus petit angle déterminé par ces formules.

Marseille le 1er décembre 1876

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

Construire un triangle ABC, *dont les côtés passent, respectivement, par trois points donnés* M, P, N, *et soient divisés, en ces points, dans des rapports donnés.*



$$AN = AC\ \alpha\ ;\ BP = BC \times \beta,$$
$$BM = BA \times \gamma.$$

α, β, γ, sont donnés.

Supposons le problème résolu.

Par le point N, je mène ND parallèle à BC, et je prolonge la droite NP jusqu'à ce qu'elle rencontre AB prolongé, en un certain point M'.

On a :

$$\frac{M'P}{M'N} = \frac{BP}{DN} = \frac{BC \times \beta}{BC \times \alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Donc, le point M' est connu ; en le joignant au point M. on aura la direction du côté BA.

On aura de même les directions des deux autres côtés.

$$\frac{ND}{BC} = \frac{AN}{AC}\ .$$

$$\frac{ND}{BC} = \alpha$$

$$ND = BC\ .\ \alpha \qquad BP = BC\ .\ \beta \qquad G.$$

DÉTERMINATION

DE LA SENSIBILITÉ D'UNE BALANCE ORDINAIRE

par M. Morel.

Dans les cours de mécanique élémentaire, on établit la théorie de la sensibilité d'une balance en partant du théo-

rème du moment des forces parallèles par rapport à un plan. Ce théorème n'étant pas explicitement énoncé dans le programme, je me propose, dans cette note, de traiter la même question en m'appuyant seulement sur la composition des forces parallèles. — Je supposerai que la balance remplit les conditions nécessaires pour sa justesse, c'est-à-dire que les bras de levier sont égaux, et que le centre de gravité est au-dessous du centre de suspension, sur une ligne abaissée de ce centre perpendiculairement à la ligne qui joint les points d'attache des deux plateaux.

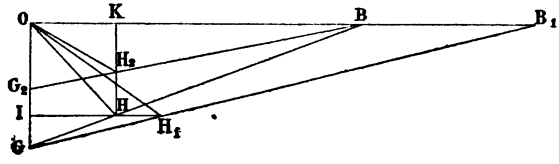
Considérons d'abord le cas où les trois points de suspension, du fléau et des plateaux, sont en ligne droite. Dans ce cas, si nous supposons les plateaux chargés de poids égaux, la résultante de ces deux poids passera par le centre de suspension et sera détruite par la fixité de ce point. Si maintenant nous supposons un poids P dans l'un des plateaux, un poids $P + p$ dans l'autre, les deux poids P auront une résultante détruite par la fixité du centre de suspension et il restera les deux forces parallèles p, appliquées à l'extrémité du fléau, et π appliquée au centre de gravité du fléau; ces deux forces auront une résultante appliquée sur la ligne qui joint les deux points d'application G et B, en un point H, tel que l'on ait

$$\frac{GH}{HB} = \frac{p}{\pi}$$

Si nous joignons le point O au point H, l'action de la force appliquée en H fera tourner la ligne OH, et par conséquent le fléau, autour du point O, jusqu'à ce que la ligne OH soit verticale. L'angle de rotation GOH pourra servir à déterminer, pour une balance donnée, la sensibilité correspondant à un excès de poids donné.

Cela posé, je vais établir les principes suivants :

I. *La sensibilité d'une balance augmente, lorsque le bras de levier augmente.*



Soient H et H_1 les positions particulières du point d'application de la résultante lorsque le levier a une longueur OB ou une longueur OB_1. On a, d'après ce qui précède :

$$\frac{GH}{HB} = \frac{p}{\pi} ; \frac{GH_1}{H_1B_1} = \frac{p}{\pi}$$

Donc $\frac{GH}{HB} = \frac{GH_1}{H_1B_1}$, et la ligne HH_1 est parallèle à OB.

Cela posé, si nous la prolongeons jusqu'au point I où elle rencontre OG, on a

$$\frac{IH}{OB} = \frac{IH_1}{OB_1}$$

et comme OB_1 est plus grand que OB, il en résulte que IH_1 est plus grand que IH. On en conclut facilement que l'angle GOH_1 est plus grand que GOH.

II. *La sensibilité se trouve augmentée, lorsque le centre de gravité se rapproche du point* O.

Supposons (fig. précéd.) que le point G vienne en G_2, alors H viendra en H_2, et comme précédemment nous prouverions que HH_2 est parallèle à OG; on aura donc en prolongeant cette ligne jusqu'au point K où elle rencontre OB :

$$\frac{KH_2}{OG_2} = \frac{KH}{OG}$$

Et comme OG_2 est inférieur à OG, KH_2 est inférieur à KH; on en conclut facilement que l'angle KOH_2 est plus petit que KOH_1 et par suite que l'angle GOH_2 est plus grand que GOH.

III. *La sensibilité d'une balance augmente quand le poids du fléau diminue.*

Car, dans ce cas, si H et H_1 sont les deux positions du point H_1, on a :

$$\frac{GH}{GB} = \frac{p}{p+\pi}$$

$$\frac{GH_1}{GB} = \frac{p}{p+\pi'}$$

Si π' est inférieur à π, $\frac{GH_1}{GB}$ est supérieur à $\frac{GH}{GB}$; donc GH_1 est supérieur à GH. L'angle GOH_1 est alors plus grand que GOH.

Déterminons maintenant la valeur de l'angle α correspondant à des valeurs déterminées : $OG = d$, $OB = l$, un poids π pour le fléau, et un excédant de poids p.

La ligne IH, parallèle à OB, nous donne :

$$\text{tang } \alpha = \frac{HI}{OI}$$

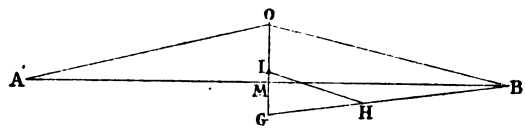
Or, les triangles semblables GHI, OGB, nous donnent :

$\frac{HI}{OB} = \frac{p}{p+\pi}$; $\frac{OI}{OG} = \frac{BH}{BG} = \frac{\pi}{p+\pi}$; donc $HI = \frac{pl}{p+\pi}$; $OI = \frac{\pi d}{p+\pi}$;

par suite

$$\text{tang } \alpha = \frac{pl}{\pi d}$$

Dans ce qui précède, j'ai supposé que les points de suspension étaient en ligne droite. Dans le cas où cela n'aura pas lieu, la sensibilité ne sera plus indépendante de la charge de chaque plateau. En effet la ligne AB rencontre en M la ligne OG, et c'est au point M qu'est appliquée la résultante des deux forces P placées dans chaque plateau.



On pourra remplacer cette force par une autre donnée par la relation $P' \times OG = 2\ P \times OM$, et que l'on appliquera au point G. Si j'appelle β l'angle OAB, j'aurai $OM = l \sin \beta$; et l'on aura à composer la force p appliquée en B avec la force $P' + \pi$, ou avec la force $\frac{2\ P\ l \sin \beta + \pi\ d}{d}$

Calculons, comme précédemment, l'angle de sensibilité α; pour cela menons encore une parallèle HI à la ligne OB qui représente le bras de levier; l'angle HIG est égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$.

Le triangle OIH donne

$$\frac{HI}{OI} = \frac{\sin \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)} = \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$$

Or, les triangles semblables GHI, GOB donnent

$$\frac{HI}{OB} = \frac{GH}{GB} \qquad \frac{OI}{OG} = \frac{HB}{GB}$$

Donc :

$$\frac{HI}{OI} = \frac{OB}{OG} \cdot \frac{GH}{HB} = \frac{l}{d} \cdot \frac{p}{\frac{2\,P\,l \sin\beta + \pi d}{d}} = \frac{pl}{2\,P\,l \sin\beta + \pi d}$$

On a d'autre part $\frac{HI}{OI} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$

On tirera de ces deux égalités

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{pl\cos\beta}{(2\,P+p)\,l\sin\beta + \pi d}$$

On voit alors que la sensibilité diminue lorsque la charge augmente. Si nous avions supposé les points de suspension des plateaux au-dessus du point d'oscillation, on reconnaîtrait que la force transportée au centre de gravité doit changer de signe, et par suite la sensibilité augmenterait avec la charge au moins dans de certaines limites; l'angle β est du reste très-petit. — Si on le suppose nul, on retombe sur la formule traitée dans le premier cas.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1876

Classe de Mathématiques Élémentaires.

On donne une circonférence, une droite fixe LL′ qui rencontre la circonférence, et deux points fixes A et A′ sur la circonférence. On joint un point quelconque M de la courbe aux points A et A′. Les droites MA, MA′ rencontrent LL′ en deux points variables P et P′. — Démontrer qu'il existe sur LL′ deux points fixes I et I′ tels que le produit IP × I′P′ demeure constant lorsque M se meut sur la circonférence. Déterminer la position des points I et I′.

Classe de Seconde.

Construire un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et celle de la bissectrice de l'angle compris entre ces côtés.

On mène les diagonales d'un trapèze ABCD, lesquelles se coupent en O. On donne les aires p^2 et q^2 des triangles AOB, COD. Trouver l'expression de l'aire des deux autres triangles AOC, BOD, et celle de l'aire du trapèze.

Classe de Troisième.

Construire un triangle ABC connaissant la base AB, l'angle au sommet et un point P de la bissectrice de l'angle formé au point C par le côté AC et le prolongement du côté BC.

ACADÉMIE DE RENNES 1876.

On donne l'angle droit xAy, et une circonférence C dont le centre est sur Ax, et le rayon est R. La droite Ay est extérieure à cette circonférence. On demande :

1° De calculer les rayons des quatre circonférences O_1, O_2, O_3, O_4 tangentes en même temps aux deux droites Ax, Ay et à la circonférence C.

2° De calculer la surface du trapèze $O_1O_2O_3O_4$.

3° De calculer la tangente de l'angle O_1CO_2. Discuter.

4° De trouver la condition pour que les circonférences O_1 et O_2 se touchent.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE CLERMONT

Mathématiques Élémentaires 1875.

1. En désignant par O le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, démontrer la relation

$$AB \times OC^2 + BC \times OA^2 + AC \times OB^2 = AB \times BC \times AC.$$

2. On donne plusieurs points, A, A′, A″, en ligne droite; quel est le lieu des points M pour lesquels la somme

$$MA^2 + MA'^2 + MA''^2 + \ldots$$

est constante? Cas du minimum.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE NANCY

Mathématiques Élémentaires 1876.

1. On fait tourner un triangle successivement autour de ses trois côtés a, b, c, et il en résulte trois volumes engen-

drés V, V_1, V_2; on donne ces trois volumes, et on demande de déterminer les trois côtés.

2. On donne un tétraèdre au moyen des trois arêtes qui aboutissent au même point, et des trois angles plans formés par ces trois arêtes. Sur une de ces arêtes, on donne un point A, et il s'agit de mener par ce point un plan parallèle à l'arête opposée, et qui partage le tétraèdre en deux parties équivalentes. Il faudra trouver comment deux autres arêtes sont coupées par ce plan.

EXERCICES

Baccalauréat ès Sciences.

SESSION DE JUILLET 1876. — FACULTÉ DE PARIS.

1. On considère deux sphères concentriques de rayon R et R'; trouver le volume compris entre les deux sphères et deux plans parallèles menés aux distances a et $a + b$ de leur centre commun.

$$\text{Rép. : } V = \pi\, b\, (R + R')\,(R - R').$$

2. Les traces d'un plan P font avec la ligne de terre des angles α et β; exprimer la tangente de l'angle que fait le plan P avec la ligne de terre, au moyen des tangentes des deux angles α et β.

$$\text{Rép. : Tang } x = \frac{\text{tang } \alpha \times \text{tang } \beta}{\sqrt{\text{tang}^2\, \alpha + \text{tang}^2\, \beta}}$$

3. Un cône de hauteur h est inscrit dans une sphère de rayon R. A quelle distance x du sommet du cône faut-il mener un plan parallèle au plan de la base pour que l'aire de la section faite dans ce cône soit le tiers de l'aire de la section faite dans la sphère par le même plan.

$$\text{Rép. : } x = \frac{RH}{3R - H}$$

4. Résoudre $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

$$\text{Rép. : } x = 2K\pi \text{ et } x = 2K\pi + \frac{2\pi}{3}$$

5. Étant donné un triangle ABC rectangle en A, trouver sur l'hypoténuse un point Q tel que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés AB et

AC soit égale à un carré donné. Étudier la variation de cette somme quand le point Q se déplace sur l'hypoténuse.

Rép. : x étant la perpendiculaire abaissée sur AB, on a :

$$x = \frac{bc^2 \pm b\sqrt{m^2(b^2+c^2) - b^2c^2}}{b^2+c^2}.$$

6. On donne une circonférence de rayon r, on mène un diamètre AB et une corde CD perpendiculaire à ce diamètre, à une distance du centre égale à d, moindre que r. Déterminer les rayons des circonférences tangentes aux deux droites rectangulaires et à la circonférence donnée.

Rép. $\begin{cases} \text{Circ. tang. intérieurement} & \text{Circ. tang. extérieurement} \\ x_1 = \sqrt{2r(r-d)} - (r-d) & x_3 = \sqrt{2r(r-d)} + (r-d) \\ x_2 = \sqrt{2r(r+d)} - (r+d) & x_4 = \sqrt{2r(r+d)} + (r-d) \end{cases}$

7. On donne un cercle et deux tangentes rectangulaires de ce cercle Ox et Oy. On mène une tangente AB telle que le triangle AOB ait une aire donnée. On demande de calculer OA et OB. Le rayon sera pris pour unité.

$$\text{Rép. : } x = \frac{m^2+2}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{m^4 - 12m^2 + 4}$$

8. Étant donné un triangle rectangle en A, on propose de mener au côté AB une parallèle PQ telle que si l'on abaisse du point Q où elle rencontre l'hypoténuse, une perpendiculaire QR sur le côté AB, le volume du cône engendré par le triangle BQR et le cylindre engendré par le rectangle APQR, quand la figure tourne autour de AB soient dans un rapport donné m.

$$\text{Rép : } RB = \frac{3mc}{1+3m}$$

9. Calculer les angles B et C d'un triangle ABC connaissant l'angle A, les deux segments m, n déterminés sur le côté BC par la perpendiculaire abaissée du sommet A sur ce côté.

$$\text{Rép : } B + C = 180^\circ - A; \quad \sin(B - C) = \frac{n-m}{n+m}$$

10. On donne le rayon R d'une sphère et un diamètre AB de cette sphère. Déterminer sur ce diamètre la distance AI de façon que, en menant par le point I le plan CID per-

pendiculaire à AB, le volume de la tranche ACID soit équivalent à celui du cylindre ayant pour base CD, et pour hauteur BI.

$$\text{Rép : } AI = \frac{R}{8}\left(15 - \sqrt{33}\right)$$

ACADÉMIE D'AIX. — EXAMENS DE BASTIA.

Dans un cône de grandeur et de formes inconnues, on donne : le volume V; le rapport K de la surface totale à l'aire de la section SAA′ que détermine dans ce cône un plan passant par son axe SO. On demande le demi-angle au sommet, le rayon, la hauteur et l'apothème. Peut-on prendre pour le rapport K un nombre quelconque?

ACADÉMIE DE CLERMONT.

Juillet 1875. — Mener un plan parallèle aux bases d'un tronc de cône, de manière qu'il partage la surface latérale de ce tronc en deux parties équivalentes.

Novembre 1875. — 1° Démontrer que dans un triangle, on a la relation :

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$$

2° Construire un triangle rectangle tel que le volume engendré en le faisant tourner autour de l'hypoténuse soit égal au huitième du volume engendré par la demi-circonférence circonscrite.

Avril 1876. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$$

QUESTIONS

FAITES DANS L'EXAMEN ORAL DU CONCOURS DE SAINT-CYR

Questions théoriques.

1.— Lorsqu'un nombre d ne divise aucun des 3 nombres a, b, c, pourra-t-il diviser la somme $a + b + c$?

2. — Trouver le reste de la division d'un nombre par 2, par 4 et par 8. Pour le nombre 247635 ne suffirait-il pas de chercher le reste de la division de 35 par 8?

3. — Un produit de la forme $(n^2 - 1)\, n^2\, (n^2 + 1)$ est toujours divisible par 60.

4.—Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ divisée par une autre aussi irréductible donne un quotient entier.

5. — Le produit de deux nombres consécutifs dont le plus grand est un carré parfait est toujours divisible par 12.

6. — Si on prend toutes les puissances d'un nombre et si on les divise par un nombre premier avec lui, les restes se reproduiront périodiquement.

7. — Comment trouver le reste de la division d'un nombre par 11, par 12?

8. — Si dans une division on remplace le dividende par le diviseur, que deviendront le quotient et le reste? — Qu'arrivera-t-il si on augmente le diviseur d'une unité?

9. — Soit la suite des nombres et leurs cubes :

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{array}$$

si on divise les cubes par 9, montrer que les restes se reproduisent de 3 en 3.

10. — Trouver deux nombres entiers consécutifs dont les cubes diffèrent de n. Dans quel cas le problème sera-t-il possible?

11. — Trouver deux nombres entiers consécutifs dont les carrés diffèrent de 357.

12.—On demande si étant donnée la fraction $\frac{n}{2n + 1}$ et si on y remplace n successivement par des valeurs entières quelconques, toutes les fractions ainsi obtenues sont irréductibles?

13. — Étant donnés 3 nombres A, B, C, on divise A et B par C et on obtient

$$A = C\,Q + R$$
$$B = C\,Q' + R'$$

peut-on remplacer dans la recherche du plus grand commun diviseur, A. B, C par R, R′ et C?

14. — Quel est le reste de la division d'un nombre par 11. — Quel est le reste de la division d'un nombre élevé au carré par 11?

Si on élevait un nombre à des puissances de plus en plus élevées, finirait-on par obtenir pour reste 0 dans la division de ces différentes puissances par 11?

15. — Quel est le plus petit nombre entier par lequel il faut multiplier 32125 pour que le produit soit un nombre entier?

16. — Théorie de la division en prenant pour exemple 234532 : 289. Doubler le diviseur et trouver le quotient et le reste sans faire l'opération. — Démontrer la conséquence de ce fait en se servant des lettres.

17. — Trouver une règle qui permette d'obtenir le reste de la division d'un nombre par 18.

18. — Nombre des diviseurs du nombre $2^{\alpha} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} . 7^{\delta}$.

19. — Convertir la fraction $\frac{13}{42}$ en une somme de fractions ayant pour dénominateurs les puissances de 12.

Trouvera-t-on une suite finie de termes?

20. — Convertir la fraction $\frac{4}{13}$ en décimales; la conversion se fera-t-elle exactement?

21. — Un nombre est divisible par un nombre premier, mais non par son carré; démontrer que le nombre n'est pas un carré parfait.

Racines carrées approchées.

1. — Extraire la racine carrée de 0,00942 à $\frac{1}{1000}$ près.

2. — Calculer $\frac{10}{\sqrt{7}}$ à $\frac{1}{1000}$ près.

3. — Extraire $\sqrt{5}$ à un millième près.

4. — Calculer $\sqrt{\frac{1}{7}}$ à 0,001.

5. — Un cercle a pour rayon un mètre. Calculer à un millimètre près le côté du carré équivalent.

6. — La base d'un rectangle est $0^m,48$, la hauteur $0^m,241$; calculer à un millimètre près le côté du carré équivalent.

7. — Calculer $x = \sqrt{\frac{1}{7} + \sqrt{\frac{1}{7}}}$ à 0,01 sans faire de raisonnement.

8. — Calculer à 0,01 près $x = \sqrt{2 + \sqrt{0,9}}$.

9. — Extraire $\sqrt{0,03257}$ à 0,001 près.

10. — Un cylindre a pour capacité 1 litre; la hauteur est double du diamètre de la base; calculer les dimensions de ce cylindre.

11. — Un terrain a pour aire 2 hectares, 8 ares, 35 centiares; calculer à un décimètre près le carré du côté équivalent.

12. — Extraire la racine carrée de 0,004 à 0,001 près.

13. — La superficie d'un terrain est de 2 hectares, 3 ares et 8 centiares. Calculer à un décimètre près le côté du carré équivalent.

14. — On sait que la surface d'un carré est égale à 8 décimètres carrés, 21 centimètres carrés, 44 millimètres carrés; calculer le côté du carré à un millimètre près.

15. — La base d'un rectangle est de 34 mètres, sa hauteur $12^m,7$, calculer le côté du carré équivalent à un centimètre près.

16. — La capacité d'un cylindre est de 1 hectolitre, la hauteur est de 1 mètre, calculer le rayon de la base en prenant $\pi = 3,14$; dire sur combien de chiffres on pourra compter.

17. — Existe-t-il un nombre fractionnaire dont le carré soit égal à 6 ?

18. — Calculer $\sqrt[4]{2}$ à 0,01 près, en extrayant deux racines carrées successives.

19. — Calculer à $\frac{1}{100}$ près la valeur de x fournie par l'expression

$$x = 100 - 3\sqrt{2}.$$

20. — Calculer $x = \sqrt{5 - \sqrt{23}}$ à 0,01 près.

21. — Chercher la longueur de la diagonale d'un cube dont l'arête est égale à 100 mètres. Évaluer cette diagonale à 1 décimètre près.

22. — Calculer $x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ à 0,01 près.

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. *(Suite.)*

Par le **docteur Henri Süter** de **Zürich**, traduite par M. G.-A. Melon.

INTRODUCTION

On peut donc, avec raison, signaler un grand progrès lorsque, peu après le milieu du XVIIIe siècle, on voit sortir de la presse un ouvrage qui satisfait, de la façon la plus heureuse, à nos exigences, par la manière dont il traite la science en l'état où elle était alors, et par son intelligence de l'historiographie. Il s'agit des deux volumes de Montucla : Montucla, *Histoire des Mathématiques, 1758, augmentée de deux volumes par de La Lande, 1802.*

Dans ce livre, Montucla, en beau style, nous offre une exposition vivante assez complète et bien enchaînée de l'histoire de toutes les sciences mathématiques réunies. Dans ce nombre, outre les mathématiques pures, on comptait alors l'astronomie, la mécanique, l'optique et l'acoustique. La grande supériorité de cet ouvrage sur ceux que nous avons cités plus haut, consiste justement en ce que Montucla nous initie à l'existence intime d'un peuple, d'une école, d'un homme. Par lui, nous concevons l'état de l'astronomie chez les peuples de l'Orient, nous apprenons à apprécier les méthodes géométriques en faveur dans l'École d'Alexandrie, nous nous familiarisons avec l'arithmétique de

Diophante. Abstraction faite des erreurs et des imperfections inévitables dans une œuvre si riche et si considérable, ce livre donne, dans une belle mesure, ce que l'on pouvait exiger d'une histoire de Mathématiques entreprise à cette époque. Il a le mérite d'avoir été le premier, et jusqu'à nos jours il n'a pas été surpassé. En 1802, Bossut publia sur l'histoire des Mathématiques un aperçu plus court. Bien que cet ouvrage glisse quelquefois à la surface, il doit pourtant entrer en ligne de compte dans une exposition enchaînée des développements historiques. Vers la fin du siècle précédent et au commencement de celui-ci, Bailly et Delambre firent paraître sur l'histoire des Mathématiques deux ouvrages remarquables où se trouve une exposition détaillée des développements successifs de cette science dans l'antiquité, le moyen âge et l'époque moderne. En outre, l'ouvrage de Delambre contient les renseignements les plus explicites sur l'astronomie des Chinois et des Indous dont la connaissance était depuis si longtemps enveloppée de l'obscurité la plus impénétrable pour nos historiens. Là se borne l'œuvre des historiens en France.

Outre les vieux écrits déjà cités de Vossius et de Weidler, on peut encore mentionner les ouvrages allemands suivants :

Heibronner, J.-C., *Historia matheseos universæ*, etc., *1741*.
Ch. Wolf, *de Præcipuis scriptis mathematicis*, *1763*.
Kaestner, *Histoire des mathématiques* (en allemand), *1793*.

Mais ils sont loin de valoir les ouvrages dont nous venons de parler. L'histoire de Kaestner ne traite de l'antiquité que fort brièvement et ne fait guère que citer, d'après leurs matières et sans aucun lien, les ouvrages des divers mathématiciens.

Au XIXe siècle, il n'a guère été produit davantage sur ce sujet, chez aucune nation ; et il semble qu'à notre époque l'histoire des Mathématiques tende à disparaître du domaine des sciences. Je veux naturellement parler d'un traité historique universel. Nous trouvons toujours, il est vrai, dans les dix dernières années, des expositions critiques séparées sur des branches ou des époques isolées. Je

signalerai les plus importantes. D'où vient donc que dans l'état actuel des investigations historiques et de l'histoire de nos progrès, les sciences positives (1) et parmi elles les Mathématiques principalement soient les plus négligées ? Je l'ignore. Pourtant s'il me faut donner une raison, je crois la trouver surtout dans cette circonstance que malheureusement encore de nos jours, on cultive bien rarement ensemble les humanités et les sciences positives. Un historien en même temps philosophe a rarement trouvé de l'attrait à l'étude des sciences mathématiques ; et un mathématicien n'éprouve que rarement un goût prononcé pour l'histoire et la philosophie. Et pourtant combien se rapprochent et tendent à se confondre les sommets des sciences positives et des sciences humanitaires ! Ces sciences s'unissent si étroitement que chacune d'elles ne peut, sans la direction donnée par l'autre, suivre son droit chemin.

En publiant les feuilles suivantes, je n'ai pas la prétention de remplir toutes les obligations que l'on doit imposer à une histoire parfaite des Mathématiques, et auxquelles j'ai fait allusion au commencement de cette introduction : je sens mes forces insuffisantes. Mais je veux du moins attirer de nouveau l'attention sur la grande utilité d'un traité historique des Mathématiques; et en rappelant quelles sont les difficultés à surmonter pour atteindre le but proposé, je les regarde comme au-dessus de mes efforts : cependant, un sujet qui réunit, dans la plus belle harmonie, deux sciences qui ont apporté la vérité la plus rigoureuse à leur base et à leur développement, ne peut tout à fait égarer et induire en erreur.

Enfin, parmi les plus récents écrits qui traitent, d'une manière distinguée, l'histoire d'une seule époque ou d'une seule branche des Mathématiques, j'ai encore à citer :

Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837.*

Nesselmann, *l'Algèbre des Grecs, 1842.* (En allemand.)

Libri, *Histoire des mathématiques en Italie, 1835.*

---

(1) *L'Histoire des sciences d'Induction*, de l'Anglais Whewell, traduit (en allemand) par Littrow, 1840, est le seul ouvrage complet qui me soit connu à ce sujet; et encore n'y considère-t-on que brièvement les mathématiques pures.

Quetelet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges, 1866.*

Cantor, *Euclide et son siècle, 1867.* (En allemand.)

Bretschneider, *la Géométrie et les Géomètres avant Euclide, 1870.* (En allemand.)

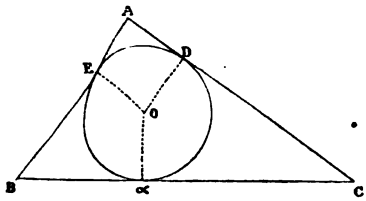
Avant tout, la reconnaissance m'oblige à signaler ici les services que m'a rendus, par ses riches notes littéraires, un ouvrage récemment publié par M. le professeur R. Wolf, et dont le titre est : *Handbuch der Mathematik*, etc.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 2.

Solution par M. Thomassin, élève de l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Un triangle rectangle ABC *est équivalent au rectangle des deux segments* Bα, Cα *faits sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.*



Soit S la surface du triangle et r le rayon du cercle inscrit. Les tangentes à un cercle issues d'un même point sont égales, par conséquent :

$$CD = C\alpha,\ BE = B\alpha$$

Nous avons donc :

$$AB = B\alpha + r,\ AC = C\alpha + r$$

donc :

$$2S = AB\ .\ AC = B\alpha\ .\ C\alpha + B\alpha\ .\ r + C\alpha\ .\ r + r^2$$

Mais le carré ADOE a pour surface r^2, le quadrilatère BαOE a pour surface Bα . r, le quadrilatère CαOD a pour surface Cα . r ; donc :

$$2S = B\alpha\ .\ C\alpha + S$$

donc enfin :

$$S = B\alpha\ .\ C\alpha$$

c. q. f. d.

QUESTION 6.

Solution par M. Thomassin, élève de l'école préparatoire de Sainte-Barbe.

Si l'on considère les triangles formés par l'un des côtés d'un polygone et les prolongements des côtés adjacents, les angles de ces triangles formés par les prolongements des côtés, ont une somme égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins quatre.

Soit ABCDE... un polygone convexe de n côtés, soient P, Q, R... les angles formés par le prolongement des côtés non consécutifs. P est l'angle opposé au côté AB, Q est l'angle opposé au côté BC... (Le lecteur est prié de faire la figure.)

Dans le triangle PAB, en nommant A et B les angles intérieurs du polygone donné, on a : $P = A + B - 2$.

Ce principe, facile à démontrer, étant admis, nous aurons successivement :

$$P = A + B - 2$$
$$Q = B + C - 2$$
$$R = C + D - 2$$

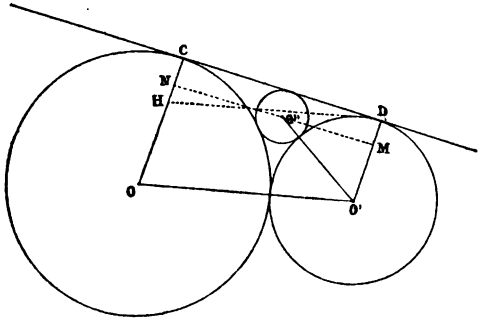
donc : $P + Q + R + \ldots = 2(A + B + C \ldots) - 2n$
$$= 4(n - 2) - 2n$$
$$= 2n - 8$$
$$= 2(n - 4)$$

c. q. f. d.

QUESTION 9.

Solution par M. Huc, élève du Lycée de Saint-Omer.

Deux cercles dont les rayons sont r *et* r' *sont tangents extérieurement. On leur mène une tangente commune extérieure, puis on détermine un cercle qui touche cette droite et les deux cercles donnés. Démontrer que le rayon* x *de ce cercle est donné par la relation.*



$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}$$

Menons par O″ une parallèle à la tangente commune CD et par D une parallèle à la ligne des centres OO′.

Le triangle O′O″M donne :

$$\overline{O''M}^2 = (r' + x)^2 - (r' - x)^2 = 4r'x$$

d'où $\quad O''M = 2\sqrt{r'x}$

De même : $\quad O''N = 2\sqrt{rx}$

donc : $\quad CD = 2\sqrt{r'x} + 2\sqrt{rx}$

Mais on a aussi :

$$\overline{CD}^2 = (r + r')^2 - (r - r')^2 = 4rr'$$

donc : $\quad CD = 2\sqrt{rr'}$

Donc enfin :

$$\sqrt{rr'} = \sqrt{r'x} + \sqrt{rx}$$

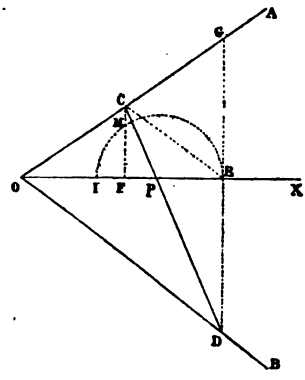
Ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

QUESTION 13.

Solution par M. Joire, élève du Lycée de Saint-Omer.

Etant donné un point P *sur la bissectrice* OX *d'un angle* AOB *par le point* P, *on mène une droite* CPD *rencontrant* OA *en* C *et* OB *en* D. *On abaisse les perpendiculaires* CF, DE, *sur la bissectrice, puis, prenant le milieu* I *de* OP, *on décrit sur* IE *comme diamètre une circonférence qui coupe en* M *la perpendiculaire* CF. *Trouver le lieu géométrique du point* M *lorsque* CD *tourne autour du point* P.



Le faisceau (C, GEDM) est harmonique, car la droite DG parallèle au rayon CM est partagée par les deux autres en deux segments égaux. OX coupe les

quatre rayons du faisceau, et I est le milieu de OP, donc on a :

$$\overline{IP}^2 = FI \times EI$$

Mais $FI \times EI = \overline{IM}^2$, donc IM est constant, et, par suite le lieu est une circonférence dont le rayon est IP.

Si on fait tourner la sécante CD autour du point P, on voit que lorsque C aura dépassé C′ la circonférence décrite sur IE′ comme diamètre ne coupera plus C′F′. Le lieu n'est donc pas la circonférence toute entière, c'est seulement la demi-circonférence M′PM.

On peut aussi démontrer le théorème par la trigonométrie.

QUESTIONS PROPOSÉES

17. — A est l'aire d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, et B l'aire du polygone semblable circonscrit; B — A est équivalent à l'aire du polygone régulier semblable inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté de B, ou bien encore du polygone régulier circonscrit à la circonférence qui a pour diamètre le côté de A.

18. — Deux cercles étant dans un même plan, et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalente au rectangle des rayons.

19. — Un point fixe O est donné dans un angle plan A. Par O, on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en B et en C. s et s' sont les aires des triangles OAB, OAC; démontrer que la somme $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$ est constante quelle que soit la manière dont on mène les transversales.

20. — Construire le pentagone ABCDE, connaissant les côtés EA, AB, BC, les diagonales AD, BD, l'angle D et le rapports des côtés DC, DE.

21. — Démontrer que si l'on prolonge dans le même sens les côtés d'un hexagone régulier, de longueurs égales à ces côtés, et si l'on joint les extrémités de ces prolongements,

on forme un autre hexagone régulier dont la surface est triple de celle du premier.

22. — On donne deux points fixes A et B. Déterminer le lieu géométrique d'un point variable C tel que la surface du triangle ACB soit équivalente à celle du triangle équilatéral ACD construit sur AC comme base.

23. — Un triangle isoscèle ABC, mobile, a deux côtés AB et AC égaux à une longueur donnée. Le sommet A décrit une circonférence donnée O et les deux sommets B et C se meuvent sur une autre circonférence également donnée O'. Trouver le lieu géométrique du symétrique du point A par rapport à BC.

24. — Un cercle étant circonscrit à un triangle ABC, par un point D du plan, on mène les lignes DB, DC coupant le cercle en P et Q. Les droites qui passent par les pieds des perpendiculaires abaissées de P et Q sur les côtés du triangle se coupent en S sous un angle égal à la différence des angles A et D.

(The Educational Times.)

25. — Mener une ligne droite parallèle à une direction donnée et coupant un demi-cercle de telle manière que le trapèze formé par la corde, le diamètre et les ordonnées des extrémités de la corde, soit maximun.

(The Educational Times.)

26. — Construire un triangle connaissant la somme $a + b$ de deux côtés, la médiane correspondant au côté b, et la hauteur correspondant au côté a.

CORRESPONDANCE.

Nous recevons de notre savant ami J. Houël, professeur à la Faculté de Bordeaux, une lettre d'encouragements, qui contient en même temps d'excellentes remarques. Nous les communiquons à nos lecteurs.

..... La proposition XX du premier livre d'Euclide (un côté d'un triangle est moindre que la somme des deux autres) est susceptible de plusieurs

autres démonstrations, dont une très-élégante, qui se trouve dans le *Commentaire* de Proclus, et qui est attribuée à Héron.

Soit ABC un triangle, AD la bissectrice de l'angle A ; par la proposition XVI d'Euclide, l'angle ADC > BAD, et par suite > DAC ; donc le côté AC est plus grand que le segment DC (prop. XIX). Par la même raison, BB > BD ; donc

$$AB + AC > BD + DC \qquad \text{c. q. f. d.}$$

..... Il est avantageux de choisir, parmi les différentes démonstrations d'un même théorème, celles qui sont indépendantes de l'axiome des parallèles et de la propriété des lignes droites de ne pouvoir se couper deux à deux en plus d'un point. Car ces démonstrations peuvent, plus tard, s'appliquer sans y changer un mot, à la géométrie de la sphère. Exemple : l'égalité de deux angles trièdres qui ont leurs faces respectivement égales.

Il en est autrement pour les démonstrations qui, comme celle de la proposition XVI d'Euclide, supposent essentiellement que les côtés d'un angle ne se rencontrent qu'au sommet. Cette démonstration n'est applicable au triangle sphérique qu'avec des restrictions qui en détruisent en général l'utilité. Aussi est-on obligé, pour démontrer qu'un côté d'un triangle sphérique est moindre que la somme des deux autres, de suivre une autre marche, en s'appuyant sur ce qui a été démontré pour les triangles rectilignes.

..... Les auteurs de Traités de Géométrie devraient s'appliquer, plus qu'ils ne le font généralement, à faire bien voir les différents aspects sous lesquels une même proposition peut être présentée. En même temps qu'ils éviteraient ainsi beaucoup de doubles emplois, ils feraient mieux pénétrer l'élève dans le fond du sujet, en lui montrant des analogies et des identités qui, sans cela, lui demeurent longtemps cachées. Ainsi les propriétés du triangle isoscèle, par des modifications dans la manière de les énoncer, deviennent immédiatement des propriétés fondamentales du cercle, sans qu'il soit besoin de recommencer la démonstration.

..... Archimède a énoncé le premier (parmi les auteurs dont les écrits nous sont parvenus) les relations d'inégalité existant entre les longueurs d'une droite et d'une courbe terminées aux mêmes extrémités, et entre les aires d'un plan et d'une surface courbe terminés au même contour. Il n'a pas présenté ces énoncés comme des *principes*, mais comme des *hypothèses* (υποθέσεις), et il me semble que, sauf le manque d'une conception nette de l'idée de *limite*, ces énoncés reviennent pour le fond aux définitions modernes de la longueur d'une ligne courbe et de l'aire d'une surface courbe. C'est comme si l'on définissait, par exemple, la longueur de la circonférence : une longueur plus grande que celle de tous les périmètres inscrits et plus petite que celle de tous les périmètres circonscrits. Ainsi les idées d'Archimède me semblent très-voisines des idées modernes, tandis que celles des partisans de la prétendue définition de la ligne droite en sont séparées par un abîme.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 260-7.

APPLICATION
DE LA
THÉORIE DES DÉTERMINANTS
A LA RÉSOLUTION ET A LA DISCUSSION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES

Théorème 1. — *Si le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

des coefficients des inconnues est différent de zéro, le système des équations

$$(1) \quad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

a une solution unique et finie.

En effet, si Δ est différent de zéro, b et b' ne sont pas nuls tous deux; b', par exemple, est différent de zéro et l'on peut tirer y de la seconde par la formule

$$(2) \qquad y = -\frac{a'x + c'}{b'}$$

Substituons dans la première, nous obtiendrons l'équation :

$$(ab' - ba')\,x + cb' - bc' = 0$$

ou

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$$

qui forme avec l'équation (2) un système *équivalent* au proposé, (en vertu d'un principe dont la démonstration est facile);

De l'équation (3) nous tirons :

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

valeur déterminée et finie. L'équation (2) nous fait ensuite trouver y sans impossibilité ni indétermination. Le système a donc une solution unique et déterminée.

Remarque. — Comme Δ est différent de zéro, l'un des coefficients a, a' au moins est différent de zéro; on peut

donc employer, pour le calcul de y, un procédé semblable à celui que nous venons de développer pour x et l'on obtient :

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Ces deux formules indiquent une loi facile à retenir que l'on trouve dans tous les ouvrages d'algèbre : *le numérateur se forme du dénominateur en remplaçant par* c *le coefficient de l'inconnue que l'on cherche.*

Application. — Résoudre :

$$3x + 5y = 86$$
$$7x - 2y = 23$$

on a immédiatement :

$$x = +\frac{\begin{vmatrix} 86 & 5 \\ 23 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}} = +\frac{-172 - 115}{-6 - 35} = \frac{287}{41} = 7$$

$$y = +\frac{\begin{vmatrix} 3 & 86 \\ 7 & 23 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{69 - 602}{-41} = \frac{533}{41} = 13$$

Théorème 2. — *Si le déterminant des coefficients des inconnues*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

est nul, les équations

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

sont en général *incompatibles;* par exception *elles rentrent l'une dans l'autre. — En d'autres termes, il y a* en général *impossibilité,* par exception *indétermination.*

1° *Supposons* $\Delta = 0$, *mais admettons que les quatre coefficients* a, b, a', b' *ne soient pas tous nuls, et soit* $b' \gtrless 0$.

Considérons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} ax + by + c & b \\ a'x + b'y + c' & b' \end{vmatrix}.$$

c'est le déterminant Δ où l'on a conservé la colonne renfermant le coefficient b' différent de zéro et où l'on a remplacé les termes de l'autre colonne par les premiers membres des équations.

Ce déterminant, développé en sommes, d'après la propriété 8 (voir page 11), devient, quels que soient x et y :

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - bc'$$

D'un autre côté, soit x_1 y_1 une solution de l'équation $a'x + b'y + c' = 0$, qui en a une infinité, parce que b' n'est pas nul. Pour cette solution, le même déterminant devient:

$$\begin{vmatrix} ax_1 + by_1 + c & b \\ 0 & b' \end{vmatrix} = (ax_1 + by_1 + c)\, b'$$

donc :

$$(ax_1 + by_1 + c)\, b' = cb' - bc' = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

le second membre n'est pas nul *en général*, b' n'est pas nul, donc $ax_1 + by_1 + c$ est différent de zéro, Donc : *en général* aucune des solutions de la seconde ne satisfait à la première; *les équations données sont incompatibles.*

Mais si *par exception*

$$cb' - bc' = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$$

toute solution de la seconde x_1 y_1 satisfait à la première; *les équations se réduisent à une à la seconde;* il y a indétermination.

Le déterminant $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ se forme de Δ en conservant la colonne où se trouve le coefficient b' différent de zéro et en remplaçant les nombres de l'autre colonne par c, c'.

2° Supposons maintenant $\Delta = 0$ et en même temps $a = b = a' = b' = 0$.

Les équations deviennent

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c$$
$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = c'$$

Il y a impossibilité si c et c' ne sont pas nuls tous deux. Il y a indétermination si $c = c' = 0$. Cette indétermination a cela de particulier que x et y sont arbitraires et *indépen-*

dants l'un de l'autre, tandis que dans le cas précédent x et y dépendaient l'un de l'autre; l'une seule des inconnues pouvait être choisie arbitrairement.

Remarque I. — Les réciproques des propositions précédentes sont vraies. Les voici :

1° Si le système des deux équations a une solution unique et finie, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

est différent de zéro.

2° Si le système de deux équations n'a pas de solutions ou en a une infinité, le déterminant Δ est nul.

Ces réciproques se démontrent par la *réduction à l'absurde.*

Remarque II. — Nous ne séparons pas la résolution de la discussion, parce qu'on ne comprend bien les restrictions qui se rapportent au calcul de la résolution, qu'en les mettant en évidence au moment même où l'on en a besoin pour continuer les calculs.

La discussion abstraite que nous avons faite se complète dans les applications, par l'examen des cas particuliers remarquables et l'interprétation des solutions négatives, s'il y a lieu. Les coefficients abc $a'b'c'$ sont des fonctions des données qui peuvent prendre, en général, des valeurs positives, nulles ou négatives. J. B.

(*A suivre.*)

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LES CALCULS

numériques imposés aux élèves dans divers concours.

Nous nous sommes demandé depuis longtemps pourquoi les Ministères de la Guerre, de la Marine, et des Finances exigent des candidats à l'École Polytechniqne, à l'École de Saint-Cyr, à l'École Navale, à l'École Forestière, l'usage des tables de logarithmes à sept décimales dont le maniement est pénible et difficile. Nous croyons que l'ignorance

des conditions dans lesquelles se font les calculs pratiques et surtout peut-être la routine sont les causes principales de cette *singularité*.

Depuis plus de trente années les candidats résolvent un triangle dont les données sont semblables à celles-ci :

$$\begin{cases} a = 543842^{m},432 \\ b = 675456^{m},323 \\ c = 786945^{m},342 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} a = 956825^{m},43 \\ b = 673742^{m},54 \\ C = 28^{\circ}35'42''56 \end{cases}$$

Il n'y a aucune raison, ce semble, de modifier l'énoncé de ces problèmes, très-propres à exercer les élèves au maniement des tables à sept décimales. Voilà pourquoi ces problèmes reviennent chaque année, et continueront, malgré nos réflexions, à faire longtemps encore partie des épreuves d'entrée à la première École de France.

On ne peut cependant pas lire l'énoncé de pareilles questions sans sourire.

Les physiciens les plus habiles n'atteignent qu'exceptionnellement la 5e figure dans leur déterminations numériques. Dans l'arpentage, la mécanique appliquée, les arts usuels, on connaît les grandeurs mesurées avec trois figures *rarement* avec quatre, jamais avec cinq (1). En donnant aux élèves des longueurs exprimées avec huit ou neuf figures, on leur impose des calculs *irrationnels* et de plus on leur fausse l'esprit.

L'angle d'une seconde est celui sous lequel on verrait un mètre à la distance de 200 kilom. Cet angle n'existe donc que dans les recherches délicates d'astronomie. Quant aux dixièmes, aux centièmes de seconde, ils n'existent que dans notre imagination. Parler de pareilles fractions aux élèves, c'est évidemment les induire en erreur relativement aux applications des sciences.

Il y a plus : nos écoles sont destinées à former des ingénieurs ou des officiers qui, non-seulement n'auront jamais à faire des calculs de précision, mais qui seront obligés de se contenter d'une très-faible approximation

(1) Nous laissons de côté les calculs de finance, dont les données peuvent avoir un nombre considérable de figures exactes.

dans les données de leurs opérations. Que dire des données ci-dessus pour les candidats à ces écoles?

C'est un principe de bon sens que *les résultats d'un calcul ne sont pas plus approchés que les données.* Donc si les données des calculs pratiques n'ont généralement que trois figures, rarement quatre, très-exceptionnellement cinq, qu'avons-nous besoin de cette énorme machine qu'on nomme table à sept décimales, lourde à porter, embarrassante, longue à feuilleter? Pour tuer une souris, faut-il donc la massue d'Hercule?

Pour opérer rationnellement suivant le précepte de Jérome de La Lande (1), il faudrait *bannir* de nos classes les tables à sept décimales et se servir des tables à cinq décimales. Le plus souvent même une table à quatre décimales, qui tient sur une feuille de carton, peut suffire aux applications. La plus commode, la plus facile à manier est sans contredit la table graphique nommé *règle à calculs.* Un praticien n'a jamais besoin d'en consulter une plus compliquée.

L'illustre M. Leverrier, qui a une longue expérience des calculs numériques rationnels, avait déjà fait des critiques semblables aux nôtres, dans les délibérations de la commission chargée en 1852 du remaniement de nos programmes d'enseignement. Le résultat fut la proscription des tables de Callet. Mais les programmes ont été de nouveau remaniés, les vieux usages ont repris le dessus et l'on a remis entre les mains des élèves les tables à sept décimales.

Nous espérons néanmoins que nos réflexions nouvelles auront quelque portée et que les professeurs chargés de choisir les compositions finiront par comprendre que les exercices *pratiques* proposés aux candidats, doivent avoir quelque rapport avec ceux qu'on rencontre dans la *pratique.*

En attendant la sage réforme que nous demandons, con-

---

(1) De La Lande dit dans la préface de ses petites tables à cinq décimales: « J'ai calculé quelques centaines d'éclipses et je n'ai presque jamais employé d'autres tables que celles que je publie, parce que mon expérience m'a fait voir que l'on a presque jamais dans l'observation une précision qui exige d'autres tables. »

tinuons à apprendre aux élèves, les moyens de corriger scrupuleusement leurs nombres et leurs logarithmes par une interpolation consciencieuse poussée jusqu'à la septième figure au moins, et de calculer les angles des triangles jusqu'aux centièmes de seconde, conformément aux programmes et aux indications des données.

J. B.

DISPOSITION DES CALCULS LOGARITHMIQUES.

L'expérience nous a appris que pour éviter les fautes de calcul dans les opérations numériques, il faut disposer les chiffres avec beaucoup d'ordre et avoir toujours le même ordre pour les opérations semblables. Voici le type suivant lequel nous opérons, et nous conseillons aux élèves de l'adopter, après avoir répété nos calculs afin de les mieux comprendre.

Nous nous sommes servis des tables de Schrön, plus commodes que celles de Callet et de Dupuis.

On voit que notre procédé consiste à éloigner sur la droite les calculs auxiliaires d'interpolation, en indiquant par des points les nombres auxquels ils se rapportent. Nous supprimons toutes les autres indications, qui nous paraissent inutiles.

Nous recommandons aux élèves l'usage du point qui sépare en deux la mantisse d'un logarithme. Il sert à éviter de nombreuses erreurs, parce qu'il facilite la lecture du logarithme et qu'il permet de faire correspondre plus facilement les chiffres de même ordre, quand on a des log. à ajouter.

Dans le calcul des lignes trigonométriques nous mettons entre parenthèse la différence tabulaire (779) afin de fixer l'attention sur la table d'interpolation à prendre pour les corrections.

CALCUL DE LOG a. (a *est donné.*)

$a = 57847,642$
$\log a = 4,762.2856$ 2808
$\text{colog } a = 5,237.7144$ 45,0
3,00
150

CALCUL DE a. (*log* a *est donné.*)

$\log a = 3,847.5795$
$a = 7040,1113$ 5795
5788
7
6.2
8
6,2
18

CALCUL DE LOG TANG a. (a *est donné.*)

$a = 27° \ 38' \ 45'',6$
$\log \text{tg } a = \bar{1},719.1739$ 1452 (512)
$\text{colog tg } a = 0,280.8261$ 256,0
30,72

CALCUL DE LOG COS a. (a *est donné.*)

$a = 57° \ 28 \ 42'',7$
$\log \cos a = \bar{1},730.4719$ 4478 (330)
$\text{colog} \cos a = 0,269.5281$ 231,0
9,90

CALCUL DE a. (*log sin* a *est donné.*)

$\log \sin a = \bar{1},458.5742$
$a = 16° \ 42' \ 20'',97$ 5742
5674 (702)
680
631,8
482

CALCUL DE a. (*log cotg* a *est donné.*)

$\log \text{cotg } a = 0,532.4847$
$a = 16 \ 21' \ 13,16$ 4847
5093 (779)
246
233,7
123
77,9
451

J. B.

(*A suivre.*)

CUBES ÉGAUX

à la somme de trois ou quatre cubes entiers,

par Eugène Rebout.

1. *Trouver quatre nombres entiers consécutifs, tels que le cube du plus grand soit égal à la somme des cubes des trois autres.*

Représentons par x le plus petit de ces quatre nombres entiers consécutifs; les trois suivants seront : $x+1$, $x+2$, $x+3$. Nous devons avoir

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3,$$

ou, en développant,

$$x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27.$$

Faisant passer tous les termes dans le premier membre et réduisant, nous en tirons l'égalité

$$2x^3 - 12x - 18 = 0,$$

et, en divisant par 2,

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$x^3 - 9x + 3x - 9 = 0,$$

ou

$$x(x^2 - 9) + 3(x - 3) = 0.$$

Puisque $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, nous pouvons la mettre sous la forme

$$x(x+3)(x-3) + 3(x-3) = 0.$$

et, en mettant le facteur $x - 3$ en évidence,

$$(x^2 + 3x + 3)(x - 3) = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation, soit en posant

$$x^2 + 3x + 3 = 0,$$

soit en faisant

$$x - 3 = 0,$$

ce qui nous donne $x = 3$.

Les quatre nombres cherchés sont donc

3, 4, 5 et 6.

En effet, on a

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3.$$

L'équation $x^2 + 3x + 3 = 0$ fournit par x les valeurs imaginaires $x = -\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-3})$, qui ne sauraient convenir à la question.

2. Il existe même des cubes entiers, qui peuvent se séparer en quatre cubes entiers.

Pour le faire voir, nous n'avons qu'à avoir recours à l'identité

$$(a + b + c)^3 = (b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 + (a + b - c)^3 + 24abc,$$

qu'il est aisé de vérifier.

Si nous y donnons à a, b et c des valeurs entières telles que le produit $3abc$ soit un cube, le second membre sera une somme de quatre cubes entiers.

Dans certains cas, l'un de ces quatre cubes pourrait être négatif : cela arriverait chaque fois que l'un des trois nombres a, b, c, serait plus grand que la somme des deux autres.

3. Exemples. — Posons $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$; nous trouvons que

$$a + b + c = 13,\ b + c - a = 7,\ c + a - b = 5,$$
$$a + b - c = 1,\ 24abc = 12^3;$$

de sorte qu'on a

$$13^3 = 12^3 + 7^3 + 5^3 + 1^3.$$

Pour $a = 18$, $b = 20$, $c = 25$, on obtient

$$63^3 = 60^3 + 27^3 + 23^3 + 13^3.$$

Il vient donc

$$63^3 = 60^3 + 27^3 + 23^3 + 12^3 + 7^3 + 5^3 + 1^3,$$

ou

$$251047 = 216000 + 19683 + 12167 + 1728 + 343 + 125 + 1.$$

ÉTUDES DE MAXIMA ET MINIMA

par M. Cochez.

Fermat dans une de ses lettres à Pascal et à Roberval, 23 août 1636, fait connaître que parmi ses découvertes, ce qu'il estime le plus « est une méthode pour déterminer toutes

» sortes de problèmes plans et solides, par le moyen de » laquelle je trouve l'invention : *maximæ et minimæ, in omnibus omnino problematibus*, et ce par une équation aussi » aisée que celles de l'analyse ordinaire. »

Il y a encore, dit-il, « infinies questions que je n'aurais » jamais pu résoudre sans cela, comme les deux suivantes :

» 1° Dans une sphère donnée inscrire le cône de la plus » grande surface, y compris la base.

» 2° Dans une sphère donnée inscrire le cylindre de la plus » grande surface, les deux bases comprises. »

« Ma méthode, ajoute-t-il, ne sert pas seulement à ces » questions, mais à beaucoup d'autres pour les nombres et » pour les quantités. »

Les géomètres contemporains de Fermat ne saisirent point l'esprit de cette nouvelle méthode; ils ne la regardèrent que comme un artifice particulier applicable seulement à quelques cas, et sujet à beaucoup de difficultés. On peut voir dans le troisième volume de la correspondance de Descartes (Amsterdam, 1714), ses lettres au père Mersenne et à Midorge et sa longue dispute avec Fermat sur ce sujet.

La méthode de Fermat repose sur le principe suivant qui est considéré par lui comme *fondamental* (*Opera varia*, Toulouse 1679).

« Si une quantité cherchée dépend d'une variable x, et si » une valeur x_1 de cette variable répond à une valeur maxi- » mum ou minimum de la quantité cherchée, $x_1 + e$ répondra » à la même valeur de cette quantité, pourvu qu'on suppose » l'accroissement indéterminé e, infiniment petit. »

1er Exemple. Appliquons ce principe à la recherche du minimum de la fonction $ax + \frac{b}{x+m}$

Donnons à x un accroissement ε infiniment petit, la fonction devient:

$$a(x+\varepsilon) + \frac{b}{(x+\varepsilon)+m}$$

D'après le principe posé par Fermat ces deux fonctions devant être égales, on aura pour déterminer la valeur de x répondant au minimum l'équation

$$a(x+\varepsilon)+\frac{b}{(x+\varepsilon)+m}=ax+\frac{b}{x+m}$$

d'où, en développant et suprimant les quantités communes :

$$a\varepsilon x^2+2ma\varepsilon x+a\varepsilon^2x+ma\varepsilon^2+m^2a\varepsilon=b\varepsilon$$

divisant par ε les deux membres, il vient en faisant $\varepsilon=0$.

$$ax^2+2max+am^2-b=0$$

$$\text{d'où } x=\frac{-am+\sqrt{ab}}{a}=-m+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

La valeur de x qui rend minimum la fonction proposée est :

$$x=-m+\sqrt{\frac{b}{a}}$$

et la plus petite valeur de la fonction est :

$$M=-(am+2\sqrt{ab}).$$

2e Exemple. Cherchons comme seconde application la valeur de x qui rend maximum la fonction

$$\frac{a}{x+m}-\frac{b}{x+n}.$$

Donnons à x un accroissement infiniment petit ε, l'équation du problème sera

$$\frac{a}{(x+\varepsilon)+m}-\frac{b}{(x+\varepsilon)+n}=\frac{a}{x+m}-\frac{b}{x+n}$$

ou

$$a\left[\frac{1}{(x+\varepsilon)+m}-\frac{1}{x+m}\right]=b\left[\frac{1}{(2+\varepsilon)+n}-\frac{1}{x+n}\right]$$

$$\text{ou}\quad\frac{-a\varepsilon}{(x+m)(x+\varepsilon+m)}=\frac{-b\varepsilon}{(x+\varepsilon+n)(x+n)}$$

changeant les signes, divisant par ε et faisant ensuite $\varepsilon=0$, il vient

$$\frac{a}{(x+m)^2}=\frac{b}{(x+n)^2}$$

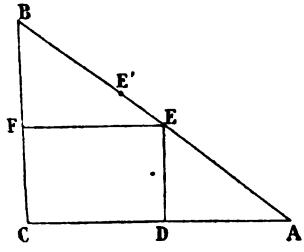
$$\text{d'où}\quad\frac{x+n}{x+m}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$$\text{et}\quad x=\frac{m\sqrt{b}-n\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Portant cette valeur de x dans la fonction proposée, on trouvera pour la valeur maximum de cette fraction.

$$M = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{m - n}$$

3e Exemple. *Trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point* E *tel qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires* ED, EF *sur les côtés, le rectangle* EDCF *formé par ces perpendiculaires et les côtés de l'angle droit du triangle, ait une surface maximum.*



Soient $CD = x$, $ED = y$ la base et la hauteur du rectangle, sa surface sera $S = xy$ quantité qui doit devenir maximum.

Considérons un point E' infiniment voisin de E; si m devient $x + \varepsilon$, y deviendra $y + \eta$, ε et η étant des quantités infiniment petites.

La surface de ce rectangle, infiniment voisin du maximum sera

$$(x + \varepsilon)(y + \eta),$$

et l'équation du problème sera

$$xy = (x + \varepsilon)(y + \eta). \qquad (1)$$

y devant varier avec x, exprimons cette dépendance par une relation tirée de la similitude des triangles EDA, BCA.

Nous aurons

$$\frac{y}{a - x} = \frac{b}{a}$$

d'où

$$y = \frac{b}{a}(a - x),$$

de même

$$\frac{y + \eta}{a - (x + \varepsilon)} = \frac{b}{a},$$

d'où

$$y + \eta = \frac{b}{a}\left[a - (x + \varepsilon).\right]$$

Portant ces valeurs de y et de $y + \eta$ dans l'équation (1), il vient toutes réductions faites

$$2x\varepsilon + \varepsilon^2 = a\varepsilon$$

divisant les deux membres par ε et faisant ensuite $\varepsilon = 0$, on a

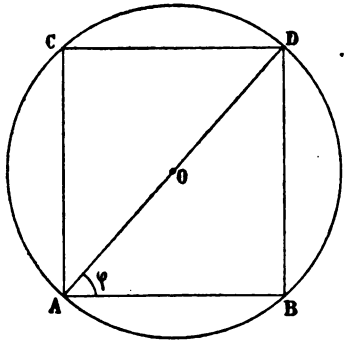
$$2x = a$$

$$\text{d'où } x = \frac{a}{2}$$

$$\text{et par suite } y = \frac{b}{2}$$

Il faut donc pour avoir le rectangle maximum que les perpendiculaires soient abaissées du milieu de l'hypoténuse.

4° Exemple. *Inscrire dans une sphère un cylindre de surface totale maximum.*



Soient $AB = x$
$BD = y$

le diamètre de base et la hauteur du cylindre. Soit de plus φ l'angle que fait AB avec le diamètre AD.

La surface totale du cylindre est

$$2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi xy$$

ou

$$\pi\left[\frac{x^2}{2} + xy\right]$$

et l'expression à rendre maximum sera

$$x^2 + 2xy.$$

Or

$$x = AD \cos\varphi$$
$$y = AD \sin\varphi$$

et l'expression à étudier devient

$$AD^2 (\cos^2\varphi + 2 \sin\varphi \cos\varphi)$$

ou simplement $\cos^2\varphi + \sin 2\varphi$.

Pour un cylindre infiniment voisin φ devient $\varphi + \theta$ (θ étant infiniment petit),

et l'on a

$$\cos^2(\varphi + \theta) + \sin 2(\varphi + \theta).$$

On a d'après le principe de Fermat

$$\cos^2\varphi + \sin 2\varphi = \cos^2(\varphi + \theta) + \sin 2(\varphi + \theta)$$

équation qui doit nous faire connaître l'angle φ.

Cette équation nous donne

$$(1)\ \sin 2\varphi - \sin 2(\varphi+\theta) = \cos^2(\varphi+\theta) - \cos^2\varphi$$
$$= [\cos(\varphi+\theta) + \cos\varphi][\cos(\varphi+\theta) - \cos\varphi]$$

or $\sin 2\varphi - \sin 2(\varphi+\theta) = 2\cos[\varphi+(\varphi+\theta)]\sin[\varphi-(\varphi+\theta)]$

$$\cos(\varphi+\theta) - \cos\varphi = 2\sin\frac{\varphi+(\varphi+\theta)}{2}\sin\frac{\varphi-(\varphi+\theta)}{2}$$

$$\cos(\varphi+\theta) + \cos\varphi = 2\cos\frac{\varphi+(\varphi+\theta)}{2}\cos\frac{\varphi-(\varphi+\theta)}{2}$$

donc l'expression (1) peut s'écrire, après suppression des facteurs communs

$$2\cos\Big(\varphi+(\varphi+\theta)\Big) = \sin\Big(\varphi+(\varphi+\theta)\Big).$$

Faisons maintenant $\theta = 0$, on a

$$2\cos 2\varphi = \sin 2\varphi,$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2,$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Le signe — ne peut être pris devant le radical, car $\operatorname{tg}\varphi$ ne saurait être négatif; il s'ensuit que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\left[\sqrt{5} - 1\right].$$

Expression qui est la même que celle du côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

Par suite le cylindre de surface totale maximum est tel que sa hauteur est au diamètre de sa base comme le côté du décagone régulier est au rayon du cercle circonscrit.

Remarque. — On se rend facilement compte de la règle de Fermat en représentant la fonction par l'ordonnée d'une courbe. De part et d'autre de l'ordonnée maxima ou minima deux ordonnées égales correspondent à deux valeurs de x différentes, $x, x+\varepsilon$. Si les deux valeurs de x qui donnent deux ordonnées égales sont elles-mêmes égales, c'est-à-dire, si $\varepsilon = 0$, la valeur de x correspond alors au maximum ou au minimun. J. B.

(*A suivre*).

NOTE SUR UN PROBLÈME DE PAPPUS

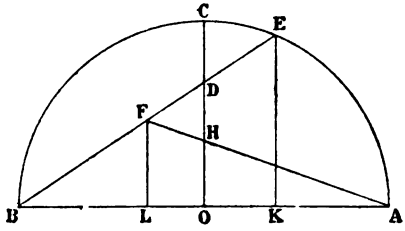
par A. Morel.

L'un des problèmes qui ont joui pendant longtemps d'une certaine célébrité est le problème de la duplication du cube. On sait que la question qu'il fallait résoudre était de trouver

l'arête d'un cube dont le volume fût le double du volume d'un cube donné. Cette question est aussi connue sous le nom de problème des deux moyennes proportionnelles ; elle revient en effet à trouver deux lignes dont les longueurs soient les moyennes géométriques insérées entre deux longueurs données.

Parmi les nombreuses solutions proposées par les anciens, nous indiquerons ici une solution due à Pappus, géomètre d'Alexandrie, qui vivait vers le IVe siècle de l'ère chrétienne ; elle est fondée sur un théorème que nous allons démontrer, et a donné lieu à la construction d'une courbe bien connue, la cissoïde de Dioclès.

Le théorème est le suivant : Étant donné un demi-cercle O, le diamètre AB et le diamètre perpendiculaire OC, on mène une sécante BDE passant par le point B, rencontrant OC en D, et le cercle en E, puis on prend sur DB la longueur DF = DE, et on joint le point F au point A ; cette ligne rencontre en H le rayon OC; on demande de prouver que OA étant le premier terme et OH le quatrième terme d'une progression géométrique, OD est le second terme.



Il faut donc prouver que l'on a $\frac{OH}{OD} = \frac{OD^2}{OA^2}$

Or, on a, dans les triangles semblables ODB, EKB,

$$\frac{OD^2}{OB^2} = \frac{EK^2}{BK^2} = \frac{KA}{KB}$$

D'un autre côté, on a $\frac{OD}{OB} = \frac{FL,}{BL}$ par les triangles semblables ODB, FLB, et aussi, par les triangles semblables, FLA, HOA : $\frac{OA}{OH} = \frac{AL}{FL}$

Multipliant membre à membre il vient

$$\frac{OD}{OH} = \frac{AL}{BL}$$

Mais d'après l'hypothèse, puisque ED = DF, il en résulte OK = OL, et par suite AL = BK, BL = AK; donc, en renversant les rapports, on a

$$\frac{OH}{OD} = \frac{KA}{KB} = \frac{OD^2}{OA^2}$$

Il résulte de là que si l'on connaît OH et OA, il faudra trouver OD, et pour cela il faudra trouver BF, ou déterminer le point F sur AH. C'est précisément ce à quoi on arrive au moyen de la cissoïde de Dioclès ; on construit en effet cette courbe de la manière suivante : On mène par le point B une ligne BE rencontrant en E la circonférence et en un point E' la tangente menée par le point A à la circonférence, puis on prend à partir du point B une longueur BF égale à EE' ; le point F est un point de la cissoïde. Il est facile de voir que si l'on construit cette courbe par points, son intersection avec AH donnera le point qui est nécessaire pour le problème qui nous occupe ; car on a BD = DE', et puisque DE = DF, on en déduit BF = EE'.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE DOUAI.

Dans un quadrilatère BCDE, on connaît trois côtés et *l'angle* formé par les deux côtés CD et BE prolongés. Calculer le 4e côté DE.

Donner les conditions que doit remplir ce quadrilatère pour que tous les rectangles qu'on lui circonscrira soient semblables.

ACADÉMIE DE POITIERS.

Concours de 1875.

1. Démontrer que tout point de la circonférence dont le centre est l'un des foyers et le rayon égal au grand axe d'une ellipse peut être pris pour l'un des sommets d'un triangle à la fois inscrit à la circonférence et circonscrit à l'ellipse.

2. Par un point A pris dans le plan d'un cercle mener une droite telle que la portion AM de cette droite comprise entre A et la circonférence ait un rapport donné avec la distance de la droite AM au centre du cercle.

Concours de 1876.

1. Déterminer un triangle connaissant l'un des angles ainsi que la médiane et la hauteur issues du sommet de cet angle. *(Question posée en 1855 au concours général.)*

2. Étant donnés un angle dièdre et une droite joignant un point de l'une des faces à un point de l'autre, déterminer sur cette droite un point tel que la somme de ses distances aux deux faces soit égale à une longueur donnée. — Discuter la question. — Chercher quelle condition doit remplir la droite donnée pour que cette somme ait la même valeur pour tous ses points.

QUESTIONS PROPOSÉES

Aux candidats à l'École centrale.

Soit O un point fixe pris sur un cercle. Autour de ce point O pivote un angle droit AOB. Soit OC le diamètre du point O. Du point B, rencontre de OB avec la circonférence, on abaisse une perpendiculaire sur OC, qui rencontre OA en I. Trouver le lieu du point I. *(de Longchamps.)*

D'un point O pris sur un cercle on mène une corde mobile OA; de l'extrémité A, on abaisse une perpendiculaire AC sur le diamètre OB et du centre D une perpendiculaire sur la corde OA. Ces deux perpendiculaires se coupent en un point I dont on demande le lieu. *(de Longchamps.)*

D'un point fixe O pris sur un cercle donné, on mène le diamètre OB et une corde mobile OA. On mène ensuite la bissectrice de l'angle AOB qui rencontre AB en un point I dont on demande le lieu. *(de Longchamps.)*

On a un cercle et un point M quelconque de ce cercle; on abaisse du point M une perpendiculaire MP sur un diamètre fixe OA, et on prolonge le rayon OM d'une longueur MI= MP. Trouver le lieu du point I. *(de Longchamps.)*

QUESTIONS

FAITES DANS L'EXAMEN ORAL DU CONCOURS DE SAINT-CYR

(Suite. — Voir page 53).

Calculs approchés. — Nombres complexes. — Divers.

1. — Calculer le quotient de 52 par 21 à 0,001 près.

2. — Une circonférence a 1 mètre de long, calculer le rayon à un millimètre près.

3. — Trouver la plus grande commune mesure de deux arcs exprimés par 68° 15′ et 32° 30′.

4. — Exprimer en heures, minutes et secondes, la fraction 0j,256374.

5. — Convertir $\frac{25}{56}$ de jour en heures, minutes et secondes.

6. — Étant donné un cylindre droit à base circulaire, le rayon de la base vaut 21 centimètres. On verse dans ce cylindre 15 hectolitres d'eau. On demande à quelle hauteur le liquide montera dans le cylindre?

7. — Calculer la hauteur d'un cylindre dont on connaît la base, 33 centimètres carrés, et le volume, 17 litres 20 centilitres.

8.— Le mille allemand est la quinzième partie d'un degré terrestre; l'évaluer en mètres. — Le résultat s'obtiendra-t-il exactement?

9. — Il y avait dans un tonneau 100 litres d'alcool. On en prend 10 litres que l'on remplace par 10 litres d'eau. On prend ensuite 10 litres du mélange que l'on remplace par 10 litres d'eau. Puis on répète sur le mélange la même opération une troisième fois. Combien y aura-t-il d'alcool pur après cette troisième opération. Généraliser le problème.

Intérêts. — Escompte. — Rentes. — Alliages, etc.

1. — Les sacs de farine pèsent 157 kilog.; l'administration admet que 157 kilog. de farine donnent 204 kilog. de pain. On demande combien 100 kilog. de farine absorbent d'eau pour se transformer en pain?

2. — Trouver l'escompte à 6 o/o d'un billet de 4280 francs payable à 75 jours.

Cette opération est-elle plus fructeuse qu'un prêt à 6 o/o? — Quel capital faudrait-il placer pendant 75 jours pour obtenir une somme égale à 4280 fr. (intérêt et capital)?

3. — On a oublié le montant d'un billet, mais on sait qu'étant à 90 jours, un banquier l'a escompté à 5 o/o et a donné 3250 francs. On demande quelle somme portait le billet?

4. — Une personne a 3850 francs de rente. A un certain jour il y a une hausse de 1 franc. De combien s'augmente le capital?

5. — On a 8 kilog. d'argenterie au titre de 0,950. On demande combien il faut ajouter de cuivre pour le ramener au titre de 0,835?

6. — On a 15 kilog. d'argent pur, que faut-il ajouter de cuivre, pour former des pièces de 1 franc au titre de 0,835?

7. —Avec 8 kilog. d'argent pur, combien fera-t-on de pièces de 1 franc, sachant que le titre des pièces de 1 franc est de 0,835.

8. — On a 1200 kilog. d'eau salée au titre de 8 o/o. On ajoute 300 kilog. d'eau pure, combien pour cent le mélange renfermera-t-il de sel?

On a 1200 kilog. d'eau salée à 8 o/o, combien faut-il ajouter d'eau pour que son titre s'abaisse à 6 o/o?

9. — Partager 180 en 3 parties proportionnelles aux nombres 2/3, 3/4, 5/6.

Opérations algébriques.

1. — On demande la vraie valeur de $x = \frac{a^m - b^m}{a^n - b^n}$ quand on fait $a = b$.

2. — Soit la relation $x = \frac{a^3 - b^3}{a^3 - ab^2}$; si l'on fait $b = a$ on trouve $x = \frac{0}{0}$.

Chercher la vraie valeur de x.

3. — Diviser :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ par } a + b + c.$$

4. — Étant données les fractions :

$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m}$, $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, on suppose $a > b$, et on désire savoir quelle est la plus grande fraction?

5. — Démontrer que l'inégalité $a^2(b + c) + a(b^2 + c^2 - bc) > 0$ est vérifiée pour toutes les valeurs de a, b, c.

6. — Diviser :

$$x^4 + 1 \text{ par } x^2 + ax + 1.$$

7. — Diviser :

$$a^3 b^3 + a^3 c^3 + b^3 c^3 - 3a^2 b^2 c^2 \text{ par } ab + ac + bc.$$

8. — Dans quel cas $x^m + a^m$ est-il divisible par $x^2 + a^2$?

9. — On donne l'expression

$\frac{x^m + a^m}{x^3 + a^3}$ et on demande les conditions pour que la division se fasse exactement?

MÉLANGES.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. *(Suite.)*

Par le **docteur Henri Süter** de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

CHAPITRE Ier.

Les premières origines de la science chez les peuples les plus anciens du monde historique.

Les querelles soulevées par la propriété des choses de l'esprit sont peut-être aussi anciennes que les luttes soutenues par les hommes pour assurer ou défendre leur exis-

tence. Déjà chez les chasseurs et les laboureurs des époques les plus reculées, les mots, les pensées, les qualités et les actions des hommes enfantèrent des discussions et des guerres. De même que, à l'âge du commerce qui développa les arts et les sciences, les individus se combattirent pour la priorité des inventions et des découvertes, de même les peuples se disputèrent la gloire d'avoir été le berceau des premières connaissances.

Aussi arrive-t-il que les Phéniciens, les Égyptiens, les Juifs et les Chinois regardaient leur pays comme le berceau de l'arithmétique; les Égyptiens, les Chaldéens et les Chinois prétendaient que l'astronomie était née parmi eux. Il n'entre pas dans nos intentions de ramener l'histoire des mathématiques jusqu'à la période préhistorique, ni de rechercher les inventeurs des diverses branches parmi les figures mythologiques de l'antiquité.

Pourtant une histoire complète et continue des progrès de cette science exige que nous fassions entrer dans le cercle de nos appréciations les idées et les modifications apportées par les divers peuples.

Si l'on considère la liaison de la vie humaine à toutes les parties des mathématiques, on arrive forcément à cette conviction que les traces les plus lointaines de cette science se confondent avec les premiers développements de l'esprit humain. En outre, on ne peut plus accorder aucune confiance à cette opinion qui place chez un peuple unique, déterminé, les observations et les connaissances qui touchent de si près aux phénomènes de la vie quotidienne.

On est conduit à admettre que les sciences n'ont pas, il est vrai, atteint chez les diverses nations le même degré de culture; chez beaucoup elles n'ont pas dépassé les notions les plus élémentaires du nombre, de l'espace et du temps : ce qui se comprend aisément et tient à des circonstances très-diverses. Mais que seulement un peuple entre tous ait été appelé à développer ces premières notions, à les appliquer et à les propager ensuite chez ses voisins, c'est là une opinion qui se trouve en contradiction formelle avec un examen plus approfondi, avec la recherche historique des progrès de l'humanité.

L'état primitif des peuples était de nature à susciter dans l'esprit des individus les premières idées sur les mathématiques et l'astronomie. Le pâtre compta ses troupeaux; le laboureur compara l'étendue de son domaine à celle du champ voisin. Le soleil tournant autour de nous, disparaissant et tour à tour se levant à l'horizon, la lune et toutes ces brillantes apparitions périodiques durent faire naître dans l'homme des conceptions précises et vivaces. Chez beaucoup de peuples elles restèrent à l'état rudimentaire, tandis que d'autres nations les réunirent, les revêtirent d'une forme déterminée, les enchaînèrent et formulèrent des lois qui conduisirent à un système, à une science.

C'est ainsi que les peuples marchands tels que les Phéniciens donnèrent tous leurs soins à l'arithmétique et formèrent cette science avant tous les autres. Les Égyptiens voulant, au moyen de canaux, répandre dans tout leur pays, les eaux fécondantes de leur Nil sacré, accordèrent toute leur faveur à la science de la mesure (la géométrie). Enfin les Chaldéens, adonnés au culte du soleil, furent amenés par leur religion même à contempler les constellations qui brillent à la voûte céleste, et ils fondèrent l'astronomie.

Ces considérations nous amènent à conclure que ces peuples doivent être regardés comme les fondateurs de ces sciences.

La formation d'un système de numération fut le premier pas vers une arithmétique scientifique. Se servir de noms différents pour désigner une série déterminée de nombres, combiner convenablement ceux-ci et en faire dériver tous les autres, constitue une méthode pour la numération. Ce qui frappe tout d'abord c'est de voir presque tous les peuples connus compter d'après le même système, celui dont la base est 10. Ce fait remarquable pourrait peut-être affermir beaucoup de personnes dans cette opinion d'ailleurs discutée que l'invention du système décimal provient d'un seul peuple et qu'elle a été ensuite successivement adoptée par les autres. Mais on pourrait dans cette coïncidence, trouver précisément une preuve contre cette opinion. Le choix du nombre 10, comme base, a été indiqué aux hommes par la nature même. Lorsqu'ils comptaient, afin de retenir dans

leur mémoire le nombre des unités, ils se guidaient sur les doigts de leurs mains. Arrivés au nombre 10, ils purent par la même voie et par l'adjonction de nouvelles unités, se contenter de parcourir de nouveau et indéfiniment la même série des dix premiers nombres. Ainsi se forma tout naturellement la numération décimale. Il y a, dans l'Amérique et dans l'Afrique (1), des peuples qui se sont bornés à une seule main; ainsi au lieu de *six* ils disent *cinq et un*. Nous trouvons chez les Romains des traces de ce système à base 5; elles existent dans leur manière d'écrire les nombres; mais dans le langage ils se servaient du système décimal. — La manière de compter de vingt en vingt ou le système vigésimal se rencontre chez des races américaines où il est très-répandu. En Europe les peuples celtiques l'ont employé; il se retrouve encore de nos jours dans le langage des Basques en Espagne. Il en subsiste une trace dans le mot français *quatre-vingts* qui est encore usité.

Les Chinois doivent dans les premiers temps s'être servis de deux systèmes : le système à base 2 et le système à base 12, ce dernier étant principalement destiné à la répartition des mesures. Le système duodécimal est bien le plus avantageux de tous les systèmes usités, et même de tous les systèmes possibles, surtout eu égard aux nombreux diviseurs du nombre fondamental et de ses composés. Dans cet écart de la marche naturelle on reconnaît le sens pratique des Chinois qui s'est affirmé à un haut degré dans beaucoup d'autres circonstances.

Dans la première période, la formation des nombres se représentait sans doute par des assemblages de petites pierres ou de billes (de là vient que compter s'exprime en latin par *calculare* du mot *calculus;* et en grec ψηφιζειν du mot ψηφος, pierre).

Peu à peu se forma aussi la planchette numérique *(abacus)* qui consistait en une série de baguettes ou de fils dont chacun portait autant de petites boules que le nombre fondamental contenait d'unités. Un premier fil portait les bou-

(1) Voyez Humboldt : *Sur les systèmes de numération usités chez les divers peuples.* (*Journal de Crelle*, tome IV, pages 205 à 231.)

les représentant les unités ; un deuxième, les boules des dizaines ; un troisième les boules des centaines,... et ainsi de suite. Ce cadre ou cette planchette, l'*abacus*, était très-usité chez les peuples de l'Orient et chez les Romains. Les Grecs l'employaient moins, grâce à la grande commodité de leur système pour représenter les nombres.

(*A suivre.*)

CONCOURS ACADÉMIQUE D'AIX. (*Voir page 27.*)

Solution par M. Boudart, professeur au Lycée de Toulon.

1° On détermine (1) sur la ligne AB le point D tel que l'on ait AB . AD = Am . Am' ; l'on fait passer une circonférence par les quatre points D, B, m, m' ; il en résulte que les points n et n' sont les transformés par rayons vecteurs réciproques des points m et m' par rapport au centre B. Ils sont donc sur la transformée de la circonférence par rapport à ce centre ; cette transformée est une droite qui coupe AB en un point C tel que BD . BC = b^2. Ce point est donc fixe.

2° Menons les lignes Dm et Dm'. Les triangles BDm, BCn sont semblables, puisque BD . BC = Bm . Bn. On a donc

$$\frac{Cn}{Dm} = \frac{Bn}{BD};$$

De même, on a

$$\frac{Cn'}{Dm'} = \frac{BC}{Bm'};$$

D'où l'on tire

$$\frac{Cn \,.\, Cn'}{Dm \,.\, Dm'} = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{Bn}{Bm'} \text{ (1).}$$

Le rapport $\frac{BC}{BD}$ est fixe, puisque C et D sont fixes.

La similitude des triangles ABm', ADm nous donne

$$\frac{Dm}{Bm'} = \frac{AD}{Am'};$$

de même, les triangles ADm', ABm nous donnent

$$\frac{Dm'}{Bm} = \frac{AD}{Am}.$$

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

Donc

$$\frac{Dm \,.\, Dm'}{Bm' \,.\, Bm} = \frac{AD^2}{Am \,.\, Am'} \quad (2)$$

En remplaçant dans l'égalité (1), il vient

$$Cn \,.\, Cn' = \frac{BC}{BD} \,.\, AD^2 \,.\, \frac{b^2}{a^2}.$$

Donc $Cn \,.\, Cn'$ est constant.

3° Le point C étant toujours sur la droite fixe AB, à une distance fixe du point B, restera immobile.

4° Si m décrit une sphère, la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques nous montre que m' décrit une autre sphère ; et alors n et n' décriront aussi des sphères.

5° Si $Am \times Am' = AB$ alors AB est tangente au cercle Bmm' ; la transformée étant perpendiculaire au rayon qui passe par B, devient parallèle à AB, et le point C est à l'infini.

QUESTION 3.

Solution par M. Bailly, élève au Petit Séminaire de Belley.

Trouver le minimum de $\frac{x^m}{y^n}$ *pour* $m > n$, *suchant que* $x - y = a$.

En remplaçant y par sa valeur $y = x - a$, la fonction qu'il s'agit de rendre minimum est $\frac{x^m}{(x-a)^n}$

La valeur correspondante à ce minimum est celle qui correspond au maximum de la fonction $\frac{(x-a)^n}{x^m}$.

Désignons par z cette fonction, on a

$$z = \frac{(x-a)^n}{x^m} = \frac{(x-a)}{x} \cdot \frac{(x-a)}{x} \cdot \ldots \times \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

il y a n facteurs de la forme $\frac{x-a}{x}$ et $m-n$ de la forme $\frac{1}{x}$.

Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par k^{m-n}, k étant une constante. La valeur cherchée x ne sera pas altérée par ce facteur et l'on aura

$$k^{m-n} z = \frac{x-a}{x} \cdot \frac{x-a}{x} \ldots \quad \frac{k}{x} \cdot \frac{k}{x} \ldots$$

Nous pouvons disposer de la constante k de manière à rendre constante la somme des facteurs de ce produit.

En effet, cette somme est

$$\frac{n(x-a)}{x} + \frac{(m-n)k}{x}$$

ou $$n + \frac{1}{x}(mk - nk - an)$$

posons $mk - nk - an = 0$, il vient

$$k = \frac{an}{m-n}$$

La somme devenant constante et égale à n, le produit sera maximum lorsque tous les facteurs seront égaux, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{x-a}{x} = \frac{an}{(m-n)x}$$

d'où $$x = \frac{am}{m-n}.$$

x et y sont données par les relations

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

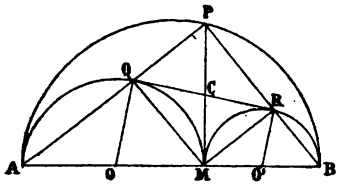
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Florentin, à Saint-Brieuc; Picaud, à Saint-Étienne.

QUESTION 5.

Solution par M. A. Maggi, candidat au Polytechnicum (Fribourg).

AB *est un diamètre d'un cercle,* P *un point du cercle,* PM *la perpendiculaire abaissée sur* AB. — *Sur* AM *et* BM *comme diamètres, on décrit deux cercles rencontrant* AP *et* BP *respectivement en* Q *et en* R. *Démontrer que* QR *touche les deux cercles.*

Soient O et O′ les centres des cercles décrits sur AM et BM comme diamètres; G le point de rencontre de QR et de PM. En joignant MQ et MR on forme un quadrilatère PQMR qui est un rectangle.



En effet, l'angle en P est droit comme inscrit dans une demi-circonférence; les angles PQM, PRM sont droits comme suppléments d'angles inscrits respectivement dans une demi-circonférence. Ainsi l'angle QMR est aussi droit.

Les diagonales d'un rectangle se coupant en parties égales, CQ et CR seront égales à CM. Or CM est tangente aux cercles O et O', donc CQ et CR sont tangentes aux deux cercles.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bouffez, élève au lycée d'Amiens; Landouzy, élève au lycée de Lille; Biette, élève au lycée du Havre; Nepveu, élève au lycée de Châteauroux; Béringuier, élève au lycée de Montauban; Vautré; Orth, élève à l'athénée royal de Liége; Lorain au collége de Semur en Auxois; Colardeau à Charleville; Aurenty au lycée de Marseille.

M. Stahl, élève au lycée de Nantes, nous a envoyé également une solution de ce problème; il démontre en outre que : *l'aire comprise entre la grande circonférence et les deux petites est égale à l'aire du cercle ayant pour diamètre* PM. En effet, soient R le rayon de la grande circonférence, r et r ceux des circonférences o et o'. L'aire de la moitié de la grande sera $\frac{\pi R^2}{2}$ et celle de la moitié des deux petites $\frac{\pi r^2}{2}$. et $\frac{\pi r'^2}{2}$. Soit PM $= 2x$. L'aire du cercle ayant $2x$ pour diamètre est πx^2 et celle comprise entre la grande circonférence et les deux petites sera $\frac{\pi (R^2 - r^2 - r'^2)}{2} = (1)$

Or $4x^2 = 2r \,.\, 2r'$ d'où $x^2 = rr'$
l'aire du cercle ayant PM pour diamètre sera donc $\pi\, rr'$. $= (2)$ Comme $R^2 = r^2 + r'^2 + 2\, rr'$ si l'on porte cette valeur de R^2 dans (1) il vient

$$\frac{\pi}{2}\, 2\, rr' = \pi\, rr'$$

valeur identique avec (2). Donc. . . .

QUESTION 11.

Solution par M. Biette, élève au Lycée du Havre.

Résoudre l'équation $x^{-x} - x^{-x} = 3\,(1 + x^{-x})$.

Cette équation peut s'écrire

$$x^x - \frac{1}{x^x} = 3\left(1 + \frac{1}{x^x}\right)$$

Posons $x^x = y$

nous aurons $y - \frac{1}{y} = 3\left(1 + \frac{1}{y}\right)$

ou $y^2 - 3y - 4 = 0$

d'où l'on tire $y' = 4, \quad y'' = -1$

On aura donc :

$$x^x = 4$$
$$x_1^{x_1} = -1$$

La première équation donne $x = 2$, la seconde $x = -1$.

Il est d'ailleurs évident qu'il n'y a point d'autres solutions, car la fonction x^x croît avec x et par suite ne prend qu'une fois la même valeur.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Nencini, candidat au polytechnicum, à Fribourg; Paillard, élève au petit séminaire de Bellay; Vautré, à Chatel-sur-Moselle; Gilbert, au lycée d'Orléans, pension Péchard; Orth, à l'athénée royal de Liége; Long, à l'athénée royal de Liége; Aurenty, au lycée de Marseille; Richard, au collége de Chartres.

QUESTION 12.

Solution par M. VAUTRÉ, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

Résoudre le système

$$\frac{a^3x}{y^2z^2} = \frac{b^3y}{z^2x^2} = \frac{c^3z}{x^2y^2} = 1.$$

Le système proposé se réduit évidemment aux trois équations

$$a^3x = y^2z^2 \qquad (1)$$
$$z^2x^2 = b^2y \qquad (2)$$
$$x^2y^2 = c^3z \qquad (3)$$

(1) et (2) multipliées membre à membre donnent :

$$a^3x^3 = b^3y^3$$

$$\text{d'où } y = \frac{ax}{b} \qquad (4)$$

(1) et (3) multipliées de même donnent :

$$a^3x^3 = c^3z^3$$

$$\text{d'où } z = \frac{ax}{c} \qquad (5)$$

Substituant dans (3) ces valeurs de y et de z, on a :

$$\frac{a}{b^2}x^3 = c^2$$

$$\text{d'où } x = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{a}}$$

Enfin cette valeur de x portée dans (4) et (5) donnera :

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^2c^2}{b}}$$

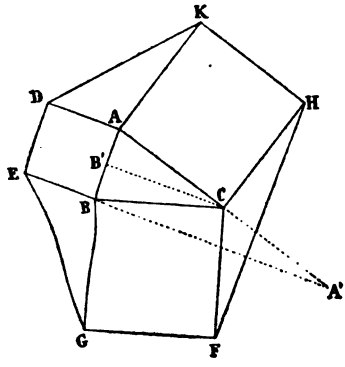
$$z = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{c}}$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Biette, élève au lycée du Havre; Bailly, élève au petit séminaire de Belley; Orth, Long, à Liége; Lorain, au collége de Semur en Auxois; Granger, au lycée de Périgueux; Richard, à Chartres.

QUESTION 14.

Solution par M. Avidun, élève au Lycée de Bordeaux.

Soit ABC un triangle. ABDE, ACFG, BCHK *sont les carrés construits sur les côtés; on connaît les longueurs des droites* EG FH, KD, *et l'on demande de construire le triangle* ABC.



Les angles ACB, HCF étant l'un aigu et l'autre obtu, et ayant leurs côtés perpendiculaires, sont supplémentaires; le triangle FCH est donc égal au triangle BCA' formé en prolongeant AC de CA' = AC. Donc comme C est le milieu de AA' si par C je mène CB' parallèle à BA' cette ligne sera médiane de AB et sera égale à $\frac{BA'}{2}$. L'on démontrerait de même que chacune des autres droites GE, DK sont respectivement doubles des deux autres médianes. Le problème revient donc au suivant : Construire un triangle connaissant les trois médianes.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Landouzy, élève au lycée de Lille; Biette, élève au lycée du Havre; Lorain au collége de Semur; Bellamy, à Saint-Brieuc.

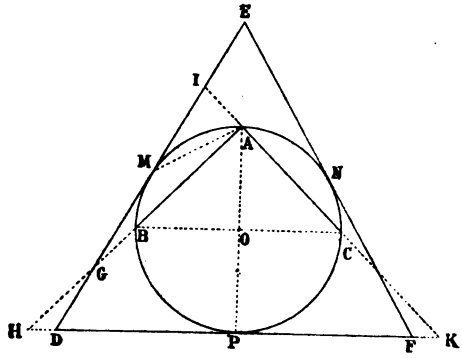
QUESTION 16.

Solution par M. Biette, élève au Lycée du Havre.

Un angle droit inscrit dans un cercle détermine trois arcs, à

chacun desquels on mène une tangente, sous la condition que le point de contact soit le milieu des segments interceptés, sur sa direction, entre les côtés de l'angle ou leurs prolongements : les trois tangentes déterminent par leur rencontre un triangle équilatéral.

Soit CAB l'angle droit donné, DEF un triangle circonscrit au cercle O et tel que le point de contact de chaque côté soit le milieu du segment intercepté sur sa direction par les côtés de l'angle ou leurs prolongements. Je dis que le triangle DEF est équilatéral.



En effet, l'angle EDF, extérieur au triangle HGD est égal à la somme des angles GHD, HGD. Le triangle IAG étant rectangle, la médiane AM est égale à la moitié de l'hypoténuse IG. Le triangle AMG est donc isoscèle et HGD = MGA = MAB. De même le triangle HAK étant rectangle, la médiane AP est égale à la moitié de l'hypoténuse HK; donc le triangle HAP est isoscèle et AHP = HAP. On a donc :

$$EDF = MAB + HAP$$

or

$$EDF = \frac{\text{arc MNP} - \text{arc MBP}}{2}$$

$$MAB = \frac{\text{arc BM}}{2} \qquad HAP = \frac{\text{arc BP}}{2}$$

donc $\text{arc MNP} - \text{arc MBP} = \text{arc BM} + \text{arc BP}$

ou $\text{arc MNP} = 2 \text{ arc MBP}$

alors

$$\text{arc MPB} = \frac{\text{arc MNP}}{2} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

par suite arc MNP = 240°

$$\text{et } EDF = \frac{240^\circ - 120^\circ}{2} = 60^\circ$$

On démontrerait de même que l'angle DFE est de 60°, par suite l'angle FED = 60° et le triangle EDF est équilatéral.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Pradel, au lycée de Montauban; Orth, à Liége.

QUESTIONS PROPOSÉES

27. — Étant donnés un point fixe A, et une droite fixe xy, construire un triangle rectangle isoscèle APM ayant un sommet au point A, un autre sommet P sur xy, et tel que si le côté AM rencontre xy au point N, on ait $AM \times AN = K^2$. *(Lucien Lévy.)*

28. — Dans un trapèze isoscèle, on connaît le périmètre $4p$, la surface a^2, et la surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze tournant autour de la ligne qui joint les milieux des bases est égale à πb^2. Déterminer les côtés du trapèze.

29. — Calculer les trois côtés a, b, c et la surface S d'un triangle rectangle, connaissant le rayon r du cercle inscrit et sachant que le point de contact du cercle divise l'hypoténuse a dans le rapport de m à n. *(G. Dostor.)*

30. — On donne une demi-circonférence, et une tangente parallèle au diamètre. Sur ce diamètre on construit un triangle équilatéral SAB, dont les côtés SA, SB coupent la tangente en E et F.— La ligne brisée AEFB tournant autour du diamètre engendre une surface équivalente à la surface de la sphère que décrit la demi-circonférence ADB en tournant autour de son diamètre.

31. — On donne un demi-cercle et une tangente parallèle au diamètre. Sur ce diamètre on construit un triangle isoscèle dont la hauteur SC est égale au diamètre AB. Les côtés du triangle coupent la tangente en E et F. Le polygone AEFB, en tournant autour du diamètre, engendre un volume équivalent à celui de la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre.

32. — Dans un parallélogramme ABCD, on prend un point P sur la diagonale BD; on mène la ligne CP, que l'on pro-

longe d'une longueur PI égale à CP ; par le point I, on mène IE parallèle à AD, et rencontrant AB en E, et FI parallèle à AB, et rencontrant AD en F. Prouver que les points F, E, P sont en ligne droite. *(de Longchamps.)*

33. — Étant données deux parallèles M, N, et deux points quelconques P et P', mener par le point P une sécante PAB telle que la partie interceptée AB soit vue du point P' sous un angle donné α. *(de Longchamps.)*

NOTE. — Cette question est la généralisation de la question posée au concours d'admission à l'École Saint-Cyr en 1875. Nous engageons nos lecteurs à en chercher une solution par la géometrie et une par l'algèbre.

34. — On donne un cercle et un diamètre AB. Trouver le lieu des points M tels que la surface du triangle AMB soit égale à celle du carré construit sur la tangente MT menée de M au cercle.

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les mentionner dans notre dernier numéro, les solutions suivantes :

Question N° 2, par MM. L. Vautré, au Grand Séminaire de Saint-Dié; Beringuier, au Lycée de Montauban; Bouffez, au Lycée d'Amiens; Estienne, au Lycée de Bar-le-Duc; Biette, au Lycée du Havre; Nepveu, au Lycée de Chateauroux; Lorain, au Collége de Semur en Auxois.

Question N° 6, par MM. Geri dé Pazzi, à Fribourg (Suisse); Bouffez; Biette.

Question N° 9, par MM. A. E. G., au Lycée de Bordeaux; Bozonet, au Petit Séminaire de Belley; Bouffez; Biette; Vautré.

Question N° 13, par MM. Avidun, au Lycée de Bordeaux; Guerdon, au Lycée de Lille; Bouffez.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 2772-7.

APPLICATION

DE LA

THÉORIE DES DÉTERMINANTS

A LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS A TROIS INCONNUES.

(Suite. — Voir page 53.)

Lemme. — *Le système des équations*

(1) $\quad A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0 \quad \ldots\ldots$

est équivalent au système

(2) $\quad A\alpha + B\beta + C\gamma\ldots = 0 \quad B = 0 \quad C = 0 \quad \ldots.$

pourvu que le multiplicateur α de l'équation que l'on ne conserve pas ne soit pas nul.

En effet, 1° Toute solution du système (1) satisfait évidemment au système (2).

2° Toute solution du système (2) rend $A\alpha$ identiquement nul, donc A identiquement nul, si α est différent de zéro; donc elle satisfait au premier système.

Théorème 1. — *Soient les trois équations*

$$(3)\qquad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0. \end{cases}$$

Si le déterminant des coefficients des inconnues

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, leur système a une solution unique et finie.

En effet, on sait que

$$\Delta = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

Si donc Δ est différent de zéro, l'un au moins des déterminants mineurs qui composent Δ est différent de zéro; supposons que ce soit $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$.

Nous pouvons multiplier respectivement les équations par les déterminants mineurs

$$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

et ajouter membre à membre. La première des équations proposées pourra ainsi, d'après le lemme, être remplacée par la suivante :

$$\begin{vmatrix} ax + by + cz + d & b & c \\ a'x + b'y + c'z + d' & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z + d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'on tire, en développant le déterminant en sommes, et en se rappelant qu'un déterminant est identiquement nul, quand deux colonnes sont identiques :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation donne pour x une valeur déterminée et finie, puisque le coefficient de x est différent de zéro, par hypothèse, cette valeur est

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

Si pour abréger nous nommons

$$\Delta_x \quad \Delta_y \quad \Delta_z$$

Ce que devient Δ quand on y remplace (en conservant les accents) par d le coefficient a de x, ou le coefficient b de y, ou le coefficient c de z, on voit que

$$(4) \qquad x = -\frac{\Delta_x}{\Delta}$$

Les deux dernières équations du système (4) feront maintenant connaître les valeurs correspondantes de y et de z et ces valeurs seront finies et déterminées, puisque par hypothèse le déterminant mineur $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$ des coefficients des inconnues est différent de zéro.

Le système ayant une solution unique, peu importe le mode de calcul que l'on pourra faire, on arrivera aux mêmes

solutions. On peut donc employer pour déterminer y et z un calcul semblable à celui qui a donné x. Ce calcul consiste pour avoir y à ajouter les équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par

$$-\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

on obtient $$y = -\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

puis par un calcul semblable

$$z = -\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

D'où l'on conclut cette règle connue : *le numérateur s'obtient du dénominateur en remplaçant dans ce dernier le coefficient de l'inconnue que l'on cherche par le terme tout connu.*

Théorème 2. — *Si* $\Delta = 0$ *et si en même temps les déterminants mineurs tels que :*

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} \text{ etc....}$$

ne sont pas tous nuls, les équations sont EN GÉNÉRAL *incompatibles ;* PAR EXCEPTION *elles se réduisent à deux qui fournissent deux des inconnues en fonction linéaire de la troisième, entièrement arbitraire.*

Supposons $\Delta = 0$ et, par exemple,

$$\delta = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$$

différent de zéro.

Considérons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} ax + by + cz + d & b & c \\ a'x + b'y + c'z + d' & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z + d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

On voit que c'est le déterminant Δ, dans lequel on a remplacé, par le premier membre des équations, chacun des termes de la colonne étrangère à δ.

Ce déterminant développé en sommes, se réduit à

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta_x$$

quels que soient x, y, z. D'autre part, pour toutes les valeurs des inconnues qui satisfont aux deux équations

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$
$$a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$

(et il y en a une infinité, puisqu'on peut les résoudre par rapport à y et z, δ étant différent de zéro), ce même déterminant devient

$$\begin{vmatrix} ax+by+cz+d & b & c \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix} = (ax+by+cz+d)\,\delta$$

Donc pour toute solution xyz des deux dernières équations on a : $(ax+by+cz+d)\,\delta = \Delta_x$.

Comme *en général* Δ_x est différent de zéro, et que par hypothèse δ est fini et différent de zéro, on voit que

$$ax+by+cz+d \gtrless 0.$$

Donc la première équation est *incompatible* avec le système des deux autres.

Dans le cas particulier où $\Delta_x = 0$, on a

$$ax+by+cz+d = 0$$

et alors toute solution des deux dernières satisfait à la première; la première est une conséquence des deux dernières.

Le système des trois équations se réduit aux deux dernières qui donnent sans impossibilité, ni indétermination les inconnues y et z en fonction linéaire de x, entièrement arbitraire.

Théorème 3. — *Si* $\Delta = 0$ *et que tous les déterminants* δ *soient nuls, sans que tous les coefficients* abc, a'b'c', a''b''c'' *soient nuls, les équations sont* EN GÉNÉRAL *incompatibles;* PAR EXCEPTION *elles peuvent se réduire à une seule, donnant l'une des inconnues en fonction linéaire des deux autres entièrement arbitraires.*

Supposons $\Delta = 0$, tous les δ tels que

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

nuls; mais supposons que l'un au moins des neuf coefficients des inconnues ne soit pas nul, que c'', par exemple, soit différent de zéro.

Considérons les déterminants

$$\begin{vmatrix} ax + by + cz + d & c \\ a''x + b''y + c''z + d'' & c'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a'x + b'y + c'z + d' & c' \\ a''x + b''y + c''z + d'' & c'' \end{vmatrix}$$

Ils se réduisent respectivement à

$$\begin{vmatrix} d & c \\ d'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix}$$

quelles que soient les valeurs de x, y, z.

Mais pour tout système de valeurs des inconnues qui satisfait à $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ (et il y en a une infinité, puisque c'' est différent de zéro), ces mêmes déterminants deviennent respectivement :

$$(ax + by + cz + d)\, c'' \qquad (a'x + b'y + c'z + d')\, c''$$

donc, pour tout système de valeurs des inconnues satisfaisant à la troisième équation, on a :

$$(ax+by+cz+d)c'' = \begin{vmatrix} d & c \\ d'' & c'' \end{vmatrix}; \quad (a'x+b'y+c'z+d')c'' = \begin{vmatrix} d' & c \\ d'' & c' \end{vmatrix}$$

et comme, *en général*,

$$\begin{vmatrix} d & c \\ d'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro, l'un ou l'autre, ou tous deux, aucune des solutions de la 3e équation ne satisfait à la fois aux deux premières; donc les équations sont contradictoires.

Si, *par exception*, on a à la fois

$$\begin{vmatrix} d & c \\ d'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

toute solution de la troisième équation satisfait aux deux premières. Il y a *indétermination*. La troisième équation fournit alors sans impossibilité, ni indétermination z en fonction linéaire de x et de y, qui restent entièrement arbitraires et indépendantes.

Théorème 4. — *Si* $\nabla = 0$, *et que les neuf coefficients des inconnues soient tous nuls, les équations sont* EN GÉNÉRAL *contradictoires;* PAR EXCEPTION, *il y a indétermination, et les inconnues sont alors complétement indépendantes les unes des autres.*

Dans ce cas, en effet, les équations deviennent

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y + 0 \,.\, z + d = 0,$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d' = 0,$$
$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d'' = 0.$$

En général, d, d', d'' ne sont pas nuls à la fois, il y a donc contradiction entre les équations. Si *par exception*

$$d = d' = d'' = 0,$$

Il y a détermination et les trois inconnues sont complétement arbitraires et indépendantes.

Remarque I. — Cette discussion est importante dans les applications de l'algèbre, parce que les lettres a, b, c..... sont des fonctions des données et nous savons par les théorèmes précédents les conditions que les données doivent remplir pour que le problème auquel elles se rapportent soit possible, impossible ou indéterminé.

Remarque II. — Cette discussion a une interprétation géométrique, car toute équation du premier degré représente un plan. J. B.

CONSEILS RELATIFS A L'EXÉCUTION DES ÉPURES

De Géométrie descriptive.

Les programmes d'admission de toutes les écoles exigent de la part des candidats la présentation d'épures de Géométrie descriptive faites dans le courant de l'année, et se rapportant aux diverses parties du cours. Ce travail est indispensable pour comprendre la géométrie descriptive, il est en outre une préparation importante à l'une des épreuves du concours d'admission. — Nous croyons devoir engager les élèves à suivre, dans l'exécution des épures, les prescriptions générales suivantes, qui sont extraites des instructions données à l'École Polytechnique pour le travail intérieur de l'École :

1. Le papier employé est toujours de format grand-aigle, et on dispose ordinairement l'épure sur un quart de feuille ou sur une demi-feuille.

2. Chaque épure a un cadre rectangulaire, composé de deux traits d'égale épaisseur. Les deux traits sont parallèles et distants de deux millimètres, l'épaisseur des traits comprise. Les dimensions intérieures du cadre sont :

Pour le quart de feuille : 40 cent. sur 26.
Pour la demi-feuille : 56 cent. sur 40.

3. Les écritures sont faites en lettres dessinées.

Le titre principal est écrit hors du cadre, au haut et au milieu de la feuille, en lettres capitales filiformes de 6 millimètres de hauteur.

Les titres secondaires sont dans le cadre, écrits en lettres italiques droites filiformes de 4 millimètres.

L'indication du cas particulier traité dans l'épure est écrite en italiques droites filiformes de 3 millimètres.

Le numero de la feuille est inscrit au haut de la feuille à droite, la désignation de l'établissement auquel appartient l'élève, au-dessus du numéro de la feuille, hors du cadre.

La signature de l'élève est placée au bas de la feuille, hors du cadre à droite.

4. Une légende, aussi concise que possible, est souvent utile pour désigner les résultats obtenus. Elle est écrite en lettres dessinées (italique penchée de 2 millimètres), dans une partie de la feuille laissée libre par la construction.

Certaines désignations très-brèves peuvent être écrites sur l'épure même, si elles ne nuisent pas à sa clarté.

On ne doit *jamais* mettre d'écriture cursive sur les épures.

5. On indique les points correspondants des diverses projections, développements et rabattements par les mêmes lettres ou les mêmes chiffres, différenciés par des accents ou des indices. Les lettres employées pour cet usage sont toujours des minuscules.

6. Les données et les résultats sont tracés en *lignes pleines* (trait continu), quand ces lignes sont vues, et en *lignes ponctuées* (points ronds, égaux et également espacés), lorsqu'elles sont cachées. Le trait de ces lignes doit être noir et net. Il faut éviter de le faire trop fin.

7. Toutes les lignes de construction sont en *trait continu rouge carmin* (1). Si l'épure contient deux constructions différentes superposées, on peut les distinguer en traçant l'une d'elles en bleu.

8. Il importe de tracer sur les épures une certaine quantité de lignes de construction. Si le résultat à obtenir consiste en courbes, la construction d'un point de chacune de ces courbes, celle des points remarquables ou singuliers sont indispensables. Si le résultat consiste dans la détermination de certaines droites, la construction entière doit être tracée. Au contraire, il convient de ménager les projetantes qui chargent inutilement les épures; il vaut mieux mettre des lettres ou des chiffres aux points correspondants. — Il est rigoureusement interdit de mettre des *lignes amorcées*.

9. On laisse dans quelques épures certaines données arbitraires; on doit alors les choisir telles que l'épure, aussi grande que possible, présente cependant, dans le cadre réglementaire, toutes les constructions demandées, et laisse facilement distinguer les résultats. — Quelquefois on doit placer sur la même feuille de papier plusieurs figures différentes.

Dans les deux cas, il est utile de faire d'abord un croquis sur papier ordinaire, soit pour se rendre compte de l'étendue que la figure va occuper sur le papier, soit pour essayer si les données qu'on a choisies conduisent à un résultat satisfaisant. Le temps qu'on emploie à faire ce croquis n'est jamais du temps perdu, parce que l'exécution de l'épure est ensuite beaucoup plus facile et plus prompte.

10. A moins qu'une épure ne soit très-compliquée, il convient de la terminer entièrement au crayon avant de passer une seule ligne à l'encre. Beaucoup de lignes de construction ne doivent pas être tracées, même au

---

(1) Il faut éviter l'emploi de la couleur délayée. On prend de l'encre carminée, et comme elle est ordinairement d'une nuance trop vive, on l'éclaircit en en versant dans un godet, et y ajoutant de l'ammoniaque liquide en quantité suffisante.

crayon; telles sont celles dont les points de rencontre avec des lignes déjà tracées sont seules à considérer.

Il est nécessaire pour éviter la confusion, de marquer les points par des lettres, au fur et à mesure qu'on les détermine.

11. Dans la mise à l'encre, il est bon de commencer par établir les données; on met ensuite à l'encre les constructions qu'on juge à propos de conserver, en les raisonnant de nouveau; on évite ainsi beaucoup d'erreurs; on termine par les résultats.

12. Quand on est amené à construire une courbe dont une partie seulement est utile, il est bon de prolonger cette courbe au delà de ses points d'arrêts, afin de bien saisir le mouvement de la courbe. Cette précaution est tout à fait nécessaire lorsque l'arc de courbe est très-court, et que le sens de sa courbure est incertain *à priori*. Ces prolongements sont tracés en *pointillé* (points longs, égaux et également espacés).

13. Lorsque la courbe à construire est une conique, on peut souvent déterminer ses axes. Mais il faut bien se garder de construire ensuite la courbe par ses propriétés géométriques; la courbe obtenue ainsi se lie généralement très-mal avec le reste de l'épure, parce que les causes d'erreurs qu'il est matériellement impossible d'éviter ne sont pas les mêmes dans les deux constructions. Les sommets obtenus sont très-utiles pour obtenir un bon tracé de la courbe, dont il faut construire des points directement à l'aide des données de la question. D'ailleurs il ne faut chercher qu'un très-petit nombre de points d'une courbe en dehors des points remarquables, et tracer la courbe au jugé, excepté dans le voisinage des points singuliers, inflexions ou rebroussements, quand on ne peut pas les déterminer directement.

14. On ne doit pas se décider légèrement à recommencer une épure, surtout quand le travail est un peu avancé. Il vaut mieux gratter, ou même mettre une feuille de retombe, sur la partie mauvaise, que de recommencer un long travail qu'on fait ensuite avec trop de précipitation.

15. Il faut toujours coller sa feuille avec soin.

16. On engage tous les élèves qui dessinent assez bien pour ne pas fatiguer leur papier, à employer des teintes dans les épures d'ombres; mais il est préférable, pour ceux qui sont inexpérimentés, de mettre des hachures sur les ombres; ces hachures, largement espacées (2 millimètres environ), se font très-vite et doivent, dans le cas des ombres cachées, être simplement disposées en liséré, sur le contour des surfaces à couvrir. A. M.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

par **A. Bougueret**, professeur à l'École J.-B. Say.

École navale. — Concours de 1876.

On donne un plan PαP′ *dont la trace horizontale* αP *fait un angle de* 30° *avec la ligne de terre; le plan est incliné de* 53° *sur le plan vertical. On donne un point* A *dans ce plan, distant de* 0,02 *du plan horizontal, et de* 0,03 *du plan vertical.*

Ce point est le centre de la base d'un cône droit, situé dans la partie supérieure du plan et dont le rayon est 0,03. *La hauteur du cône est* 0,12. *Trouver les projections du cône.*

1° *Détermination du plan* P'αP.

Un plan P'αP étant donné par ses traces, on obtient l'angle qu'il fait avec le plan vertical en le coupant par un plan perpendiculaire à la trace verticale P'α, et par suite perpendiculaire au plan vertical, et en rabattant ce plan sécant.

L'intersection des deux plans est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont sur les plans de projections.

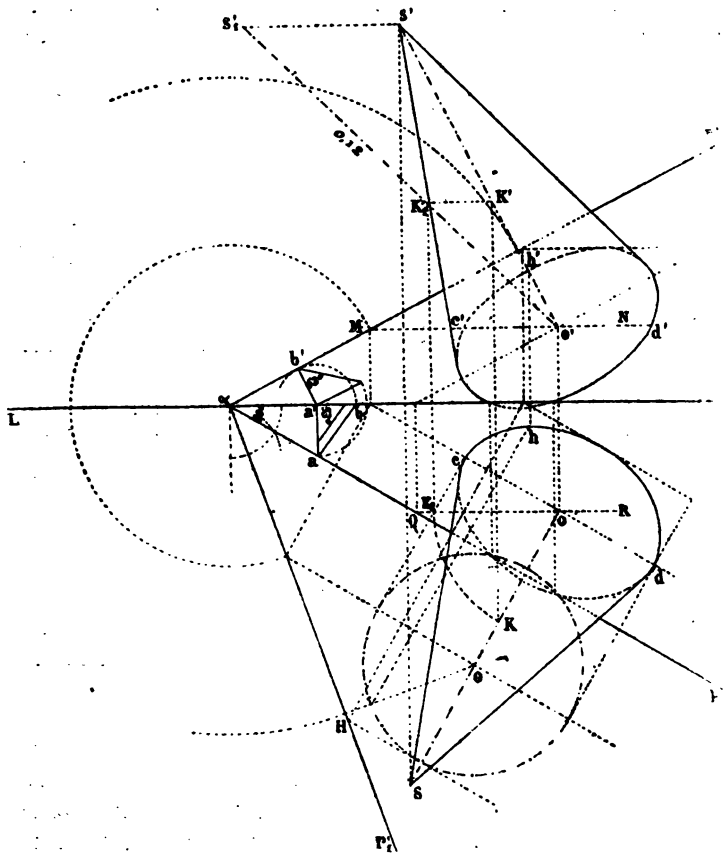
Dans le cas présent, on mène la *trace horizontale* Pα, faisant 30° avec la ligne de terre; on abaisse une perpendiculaire *aa'* sur la ligne de terre par un point quelconque de Pα; on obtient ainsi un côté de l'angle droit du triangle rectangle dont on vient de parler, triangle dans lequel on connaît l'angle opposé à ce côté; on construit ce triangle rectangle en *aa'b* sur ce plan horizontal; du point *a'*, comme centre, avec *a'b* comme rayon, on décrit un arc de cercle, et, du point α, on mène une tangente à cet arc : c'est la *trace verticale* du plan.

2° *Détermination du centre du cône.*

Le centre du cône est l'intersection de 3 plans : 1° le plan P'αP; 2° le plan horizontal MN situé à 0,02 du plan horizontal de projections; 3° le plan QR, parallèle au plan vertical, situé à 0,03 en avant de ce plan vertical. Ces 3 plans se rencontrent au point (*o,o'*).

3° *Projections du cône.*

On rabat le plan P'αP sur le plan horizontal ainsi que le point (*o,o'*) qui tombe en O; du point O, comme centre, avec une ouverture de compas égale à 0,03, on décrit une circonférence, qui est la base du cône en vraie grandeur; on ramène cette circonférence en projections, ce qui donne les deux ellipses *cod, c'o'd'*; du point *o'*, on mène, perpendiculairement à P'α une ligne *a*S', qui est la projection verticale



de l'axe du cône, et qui est égale à 0,12 dans l'espace; du point *o*, on mène perpendiculairement à P*α* une ligne *os*, qui est la projection horizontale de l'axe du cône.

Il n'y a plus qu'à former les contours apparents du cône au moyen de tangentes aux ellipses, partant des points *s* et *s'*.

N. B. — Sur l'épure, le centre de la base du cône a été désigné par la lettre O, au lieu de la lettre A, qui était indiquée dans l'énoncé.

DÉTERMINATION DE LA SENSIBILITÉ

d'une balance ordinaire,

par M. E. Colot.

(Voir page 45.)

Voici une démonstration très-simple de la formule relative à la sensibilité d'une balance dans le cas le plus général, que nous avons reçue de M. Colot, ancien élève de l'École Polytechnique. Elle complètera l'étude de M. Morel sur la même question. (Voir la figure de la page 48.) J. B.

On peut considérer la force π comme la résultante de deux forces qui lui seraient parallèles, l'une de sens contraire appliquée au point O et détruite par la résistance de ce point et l'autre de même sens, appliquée au point M et ayant pour intensité

$$\pi \times \frac{OG}{OM} = \frac{\pi d}{l \sin \beta}$$

Les deux forces P pouvant être remplacées par une force 2P, appliquée au point M, il y aura équilibre si la résultante des forces $2P + \frac{\pi d}{l \sin \beta}$ et p, agissant en M et en B, passe au point C où la direction OC de la pesanteur rencontre la droite AB.

En exprimant que cette condition est satisfaite, on trouve successivement :

$$\frac{MC}{BC} = \frac{p}{2P + \frac{\pi d}{l \sin \beta}}$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{p}{2P + p + \frac{\pi d}{l \sin \beta}}$$

$$\frac{OM \operatorname{tg} \alpha}{OM \cot \beta} = \frac{pl \sin \beta}{(2P + p)\, l \sin \beta + \pi d}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl \cos \beta}{(2P + p)\, l \sin \beta + \pi d}$$

formule qu'il s'agissait précisément d'établir.

MODÈLE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Résolution d'un triangle. — 3e Cas.

Données.

$a = 57832{,}48$
$b = 32456{,}25$
$C = 75° \; 28' \; 36'', 4$

Résultats.

$A = 72° \; 13' \; 11'', 6$
$B = 32 \; 18 \; 13{,}0$
$c = 58792{,}635$
$S = 908522500$

Calcul de $\frac{1}{2}(A + B)$.

$$A + B = 180 - C$$
$$\begin{array}{rl} 180 = & 179° \; 59' \; 60'', 0 \\ C = & 75 \; 28 \; 35, \; 4 \\ \hline A + B = & 104 \; 31 \; 24, 6 \\ \frac{1}{2}(A + B) = & 52 \; 15 \; 42, 3 \end{array}$$

Calcul de φ.

$$\text{Tang } \varphi = \frac{b}{a}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log } b = & 4{,}511.2984 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Log } a = & \underline{4{,}762.1718} \ldots\ldots \\ \text{Log tang } \varphi = & \bar{1}{,}749.1266 \\ \varphi = & 29° \; 18' \; 05'', 92 \ldots\ldots\ldots \\ 45° = & \underline{44 \; 59 \; 60, \; 00} \\ 45 - \varphi = & 15 \; 41 \; 54, \; 08 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2950 \\ 26{,}8 \\ 6{,}70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1682 \\ 30{,}0 \\ 6{,}0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1266 \\ \underline{0974} \; (493) \\ 292 \\ \underline{246{,}5} \\ 455 \\ \underline{443{,}7} \\ 113 \end{array}$$

Calcul de $\frac{1}{2}(A - B)$.

$$\text{Tang } \frac{1}{2}(A - B) = \text{tg } \frac{1}{2}(A + B) \text{ tang } (45 - \varphi)$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log tang } \frac{1}{2}(A + B) = & 0{,}111.2844 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Log tang } (45 - \varphi) = & \underline{\bar{1}{,}448.7934} \ldots\ldots \\ \text{Log tang } \frac{1}{2}(A - B) = & \bar{1}{,}560.0778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2744 \; (435) \\ 87{,}0 \\ 13{,}05 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7604 \; (809) \\ 323{,}6 \\ 6{,}472 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(A - B) = 19° \; 57' \; 26'', 3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{r} 0778 \\ \underline{0167} \; (656) \\ 611 \\ \underline{590{,}4} \\ 206 \\ \underline{196{,}8} \\ 92 \end{array}$$

Calcul de A *et de* B.

$$\frac{1}{2}(A + B) = 52^\circ\ 15'\ 42'',3$$
$$\frac{1}{2}(A - B) = 19\ \ 57\ \ 29,3$$
$$A = 72\ \ 13\ \ 11,6$$
$$B = 32\ \ 18\ \ 13,0$$

Calcul de C.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

Log a = 4,762.1718
Log sin C = 1,985.8955..... ..... 8925 (55)
Colog sin A = 0,021.2556.. . $\bar{1}$,978,7433 (67) 27,5
6,7 2,20
Log c = 4,769.3229 4,02
$\bar{1}$,978.7444, = log sin A
c = 58792,635..... 3229
3182
47
~~44,4~~
26
22,2
38

Calcul de S.

$$S = \frac{ab \sin C}{2}$$

Log a = 4,762.1718
Log b = 4,511.2984
Log sin C = $\bar{1}$,985.8955
Colog 2 = $\bar{1}$,698.9700
Log S = 8,958.3357
S = 908522500..... 3357
3345
12
9,6
24

PROBLÈME DES COURSES

par M. Cochez.

Plusieurs chevaux, A, B, C... aux cotes m, n, p... *doivent courir dans une course. Quelle somme doit-on placer sur chacun d'eux, pour gagner une somme de* a, *quel que soit celui qui arrive le premier.*

1° Considérons trois chevaux; et soient x, y, z les sommes placées sur A, B, C.

Si A arrive premier la somme gagnée sera mx; et la somme perdue sera $y + z$. Le gain $mx - y - z$ devant être égal à a, on a l'équation

$$mx - y - z = a \qquad (1)$$

De même si B arrive premier, on aura l'équation

$$ny - x - z = a \qquad (2)$$

et si C arrive premier, on aura

$$pz - x - y = a \qquad (3)$$

Telles sont les équations qui vont nous permettre de trouver x, y, z.

Pour calculer x, y, z, il est avantageux de calculer d'abord la somme $x + y + z$.

Pour cela nous remarquerons que les trois équations précédentes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} x + mx &= a + (x + y + z) \\ y + ny &= a + (x + y + z) \\ z + pz &= a + (x + y + z) \end{aligned}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a + (x + y + z)}{m + 1} \\ y &= \frac{a + (x + y + z)}{n + 1} \\ z &= \frac{a + (x + y + z)}{p + 1} \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

ajoutant ces trois relations (A) il vient

$$x + y + z = \left[a + (x + y + z)\right]\left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}\right]$$

d'où

$$x + y + z = a \frac{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}}{1 - \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}\right)} \quad (4)$$

Cette valeur trouvée pour $x + y + z$, montre que la condition nécessaire pour la possibilité du problème est

$$1 > \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}.$$

Si nous portons cette valeur (4) dans chacune des relations (A) il vient, toutes réductions faites,

$$x = \frac{a}{(m+1)\left[1 - \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}\right)\right]}$$

$$y = \frac{a}{(n+1)\left[1 - \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}\right)\right]}$$

$$z = \frac{a}{(p+1)\left[1 - \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1}\right)\right]}$$

2° Si au lieu de trois chevaux on en considérait un plus grand nombre, les calculs seraient identiquement les mêmes.

Remarque. — L'examen des valeurs trouvées pour les inconnues x, y, z, nous donne la règle suivante pour les déterminer dans tous les cas, sans avoir besoin de résoudre les équations auxquelles on est conduit :

On ajoutera une série de fractions ayant pour numérateurs l'unité; pour dénominateur les diverses cotes augmentées de l'unité; on retranchera la somme de ces fractions de l'unité. On multipliera le résultat par la cote plus 1 *correspondante à l'inconnue que l'on cherche et l'on divisera par ce résultat, la somme que l'on se propose de gagner.*

APPLICATION NUMÉRIQUE.

Si l'on suppose $m = 1$, $n = 3$, $p = 4$, et que l'on veuille gagner $a = 100$ fr.

On aura
$$x = 1000$$
$$y = 500$$
$$z = 400$$

Remarque. — Plus les cotes seront élevées, moins la somme que l'on devra placer pour gagner une somme déterminée sera grande.

AUTRE SOLUTION

par **M. Buguet**, élève de l'École normale supérieure.

On sait que dans une course de chevaux, si l'on place la somme x sur un cheval de *cote* A, dans le cas où le cheval arrivera le premier, on recevra la somme x plus Ax, c'est-à-dire $(A + 1)x$.

Supposons alors une course de n chevaux, cotés respectivement

$$\alpha_1 - 1, \quad \alpha_2 - 1, \quad \alpha_3 - 1, \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_n - 1.$$

Quelles sommes faudra-t-il placer sur chacun d'eux pour avoir la même somme S *de bénéfice, quel que soit le cheval qui arrive le premier?*

Appelons x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_n$ les sommes inconnues; on aura les équations

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + S = \alpha_1 x_1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + S = \alpha_2 x_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + S = \alpha_n x_n$$

Multiplions nos équations respectivement par $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\alpha_3}$, ... $\frac{1}{\alpha_n}$, et ajoutons, nous aurons

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$+ S\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

Posons $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = P$,
il viendra

$$P = \frac{S\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)}.$$

La première équation devient alors

$$\alpha_1 x_1 = S + P = \frac{S}{1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)}$$

Donc

$$x_1 = \frac{\frac{S}{\alpha_1}}{1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)}$$

Les autres valeurs s'obtiendraient par symétrie.

Discussion : Pour que les inconnues aient des valeurs admissibles, il faut que l'on ait

$$\frac{S}{1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)} > 0.$$

Si donc on veut gagner, comme $S > 0$, le dénominateur doit être positif.

Si l'on veut se contenter de ne pas perdre, comme $S = 0$, il faut que le dénominateur soit nul.

Enfin, on perdra toujours si le dénominateur est négatif.

Proposons-nous de gagner précisément la somme

$$S = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}\right)$$

Alors on aura

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \; x_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \; x_3 = \frac{1}{\alpha_3} \; \ldots \; x_n = \frac{1}{\alpha_n};$$

Donc, si l'on place sur chaque cheval une somme égale à l'inverse de sa cote plus un, on recevra toujours la somme 1, et la somme des placements sera

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}.$$

On serait arrivé facilement à cette solution par l'arithmé-

tique, mais on voit en outre que c'est la seule solution du problème.

Pour appliquer cette dernière combinaison, il suffira de faire les calculs comme il est dit, puis de multiplier tous les nombres obtenus par un même nombre, de manière à donner une somme quelconque.

QUESTIONS

POSÉES DANS LES EXAMENS ORAUX DU CONCOURS DE SAINT-CYR

(Voir page 83.)

PROBLÈMES 1er DEGRÉ

1. — Résoudre $\frac{a+x}{b+x} = \frac{m}{n}$

Énoncer le problème dont cette équation donne la solution.

2. — Deux courriers marchent sur une même ligne droite en sens contraire l'un de l'autre, l'un avec une vitesse a, l'autre avec une vitesse b.

Montrer que le point de rencontre partage le chemin parcouru en segments proportionnels aux vitesses.

3. — En partant de 7 h. 10 m., dans combien de temps l'aiguille des minutes passera-t-elle sur celle des heures?

4. — Quel est l'angle que font les deux aiguilles d'une horloge lorsqu'il est 7 h. un quart.

5. — Résoudre :
$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' &= 0 \end{aligned}$$

6. — Chercher le nombre qu'il faut ajouter aux deux termes de $\frac{8}{15}$ pour obtenir une fraction différant de l'unité d'un millionième.

7. — Deux mobiles partent l'un de A, l'autre de B sur un même rayon; le premier parcourt la circonférence OA en 20 h., le second, la circonférence OB en 15h., on demande dans combien de temps les deux mobiles se retrouveront sur un même rayon.

8. — Soit une fraction $\frac{a}{b} < 1$. Quel nombre x doit-on ajouter aux deux termes pour que $\frac{a+x}{b+x} = 2\,\frac{a}{b}$. Discuter.

9. — Trouver une fraction équivalente à $\frac{37}{102}$ et dont la somme des termes soit égale à un nombre donné.

10.—Étant donné un tronc de cône droit; trouver sur sa hauteur un point tel qu'en le joignant à tous les points des circonférences de base, on obtienne deux cônes dont la somme des volumes soit égale au volume d'un cône donné.

2e DEGRÉ. — TRINOMES. — MAXIMA.

1. — Résoudre

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{a+b}.$$

2. — Résoudre

$$+\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=+\sqrt{a+b}$$

On a $x=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Vérification.

3. — Résoudre l'équation

$$\sqrt{5x+4}+\sqrt{x+3}=5.$$

4. — Résoudre l'équation $x+\dfrac{ax}{x-a}=b$

5. — Résoudre $\dfrac{x^2+x+1}{x}=m$

Condition de réalité des racines.

6. — Résoudre l'équation

$$ax^2-3ax+x+a=0.$$

Condition de réalité des racines.

Quel nombre faudrait-il mettre à la place de a pour que le 1er membre de l'équation fût un carré ?

7. — Résoudre l'équation

$$(a-x)(x-b)=x^2$$

Conditions de réalité des racines.

8. — Résoudre l'équation

$$(x-a)^2(x-b)=x^3-a^3$$

Conditions pour que les racines soient réelles. Entre quelles limites doit être compris le rapport $\dfrac{a}{b}$ pour que les racines soient réelles?

9. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{b^2}.$$

10. — Résoudre les équations

$$x+y=a.$$
$$x^2-y^2=mx+ny.$$

11. — Résoudre

$$\frac{x-y}{a}=\frac{x+y}{b}=\frac{xy}{c^2}$$

12. — Résoudre l'équation

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x-b} = K.$$

13. — Résoudre

$$x^2 + y^2 = K^2$$
$$x(x+y) = 2R^2$$

14. — Quelle condition doivent remplir les coefficients a, b, c, pour que le trinôme $ax^2 + bx + c$ soit un carré parfait?

15. — Quelle relation doit-il y avoir entre les coefficients a, b, c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ pour que le carré de l'une des racines soit égal à l'autre?

16. — Entre quelles valeurs doit varier x pour que le trinôme $x^2 - 7x + 15$ soit positif?

17. — Chercher les valeurs de a qui satisfont à l'inégalité

$$3a^2 - 8a + 1 > 0.$$

18. — Résoudre l'inégalité

$x^2 - 12x + 37 > 0$. Trouver la valeur minimum de x.

19. — Trouver les valeurs de a qui rendent le trinôme $a^2 - 8a + 17$ positif. — Chercher le minimum.

20. — Inscrire dans un triangle donné un rectangle de surface maximum. Construction géométrique.

PROBLÈMES 2e DEGRÉ.

1. — Étant donné un triangle ABC, on veut mener une parallèle MN à la base, de manière que l'on ait :

$$\overline{MN}^2 = MB \,.\, CB.$$

Discuter la formule obtenue.

2. — On donne un rectangle ABCD et on demande de trouver sur AB un point E tel que de ce point l'on puisse voir AD et CD sous le même angle.

3. — On donne un triangle ABC; on mène une parallèle DE à la base BC ; on joint BE.

Placer DE de manière que surface BDE $= K^2$. Cette surface a-t-elle un maximum. Discussion. — Y aura-t-il toujours deux solutions?

4. — On donne un triangle ABC, on demande de trouver sur la hauteur AD un point M tel que l'on ait, en abaissant MF et ME respectivement perpendiculaires sur AB et AC, $\overline{MD}^2 + \overline{ME}^2 + \overline{MF}^2 = a^2$, a^2 étant un nombre donné; chercher pour quel point la somme $\overline{MD}^2 + \overline{ME}^2 + \overline{MF}^2$ est minimum. — Discussion de ce problème en faisant varier l'angle au sommet.

5. — On donne un cercle et un diamètre AB de ce cercle, par l'extrémité A de ce diamètre on mène une corde AC faisant un angle α avec AB. On demande de mener une perpendiculaire DE à AB, qui soit partagée par la droite AC en deux parties égales. Discussion lorsque α varie de 0 à 90°.

6. — Étant donné un rectangle ABCD dont les côtés AB et AC sont prolongés, on demande de mener une droite MDN passant par le point D et telle que la somme des triangles MCD, BDN soit égale à un certain nombre de fois le rectangle donné, ou en d'autres termes que l'on ait $MCD + DBN = m \cdot bh$.

Discussion du problème.

7. — On donne un rectangle ABCD dont les côtés AC et CD sont prolongés et on veut mener par le point B une sécante MN qui donne $BM^2 + BN^2 = K$. Surface ABCD.

8. — On décrit un cercle sur un diamètre donné AB et par A on mène une droite AC faisant avec AB un angle donné α. Trouver sur AB un point P tel que $MP^2 + \overline{NP}^4 = \overline{K}^4$, M et N sont les points de rencontre avec le cercle et la droite AC de la perpendiculaire élevée en P à AB.

9. — Étant donné un triangle rectangle ABC on veut trouver sur l'hypoténuse BC un point M tel que l'on ait $BM \times CM + \overline{AM}^2 = K^2$. Discuter la formule obtenue.

10. — On donne une demi-circonférence O, sur le diamètre AB un point P. Trouver sur la circonférence un point M tel qu'en joignant ce point aux points A et B et en menant par P des parallèles à ces lignes, on forme un rectangle PDMC de périmètre constant quel que soit P.

11. — On donne un demi-cercle, mener CD parallèlement au diamètre BA, de manière que BC + CD égale une longueur donnée m. Discussion.

Résoudre le problème en évitant les radicaux; prendre BC pour inconnue.

12. — On demande de trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point M tel qu'en le joignant au point A et en abaissant la perpendiculaire MD sur AB, on forme un triangle AMD ayant une surface donnée m^2.

13. — On donne un rectangle ABCD, on prolonge les côtés AB et AC, on demande de mener par D une ligne MDN telle que $DN \cdot DM = K^2$.

Résoudre la même question en prenant l'angle AMD pour inconnue.

14. — On donne une droite AB, on élève deux perpendiculaires égales AC, BD. On demande un point M tel que :

$$CMA = 2\ DMB.$$

Discussion.

15. — Étant donné un cercle O, mener une corde AB telle qu'ajoutée à la distance qui la sépare du centre, elle donne une longueur donnée : en d'autres termes que l'on ait :

$$AB + OD = l.$$

Discussion.

16. — On a deux droites rectangulaires ox, oy. Par un point B de ox, on mène une parallèle BD à oy jusqu'au point de rencontre avec une parallèle CD à ox; on mène une sécante BMN qui détermine ainsi deux triangles BDM, CMN. On demande la position de la droite CMN pour que la somme des deux triangles soit minimum. Traiter la question par l'algèbre et la trigonométrie.

17 — On donne trois droites parallèles et la perpendiculaire commune ACB : mener CE, CF faisant un même angle x avec la parallèle du milieu et telle que si on mène EF, la droite obtenue soit égale à une longueur donnée K.

Conditions de possibilité.

18. — On donne un quart de cercle AB. On demande de mener une tangente telle que OM + ON = l, l étant une longueur donnée.

Résoudre le même problème en prenant un angle pour inconnue, l'angle NOC par exemple.

19. — On donne un demi-cercle, on demande de mener CD parallèle au diamètre AB, de telle sorte que le parallélipipède construit sur les dimensions AC, CD, DB, ait un volume égal à un cube donné a^3.

MÉLANGES

DU ROLE DE L'EXPÉRIENCE

DANS LES SCIENCES EXACTES

par **M. J. Hoüel,** professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux

---

La plupart des phénomènes qui se passent sous nos yeux ne sont pas susceptibles d'une détermination *exacte*, et, lorsqu'ils se reproduisent, nous n'avons aucun moyen de nous assurer de leur parfaite identité. Il en est cependant — et ce sont naturellement les plus simples — pour lesquels la détermination est possible avec une approximation et une sûreté *(eindeutigkeit)* assez grandes, pour que l'incertitude que nous laissons subsister soit pour nous sans inconvénient.

Quand la comparaison exacte est possible, on peut procéder à l'étude des lois de la transformation d'un phénomène dans un autre, et si ces lois sont assez simples pour que nous réussissions à les reconnaître, leur ensemble constituera l'objet d'une *science exacte*.

La construction d'une telle science se compose essentiellement de deux parties distinctes : l'une, qui est fondée sur l'observation et l'expérience, consiste à rassembler des faits,

et à en conclure par induction les lois et les principes qui serviront de base à la science; l'autre, qui n'est qu'une branche de la Logique générale, s'occupe de combiner ces principes fondamentaux, de manière à déduire la représentation des faits observés, et à prédire en outre des faits nouveaux.

L'observation des faits ne peut, en général, avoir lieu avec une rigoureuse exactitude, et n'est jamais complète. Rien ne peut donc nous garantir *a priori* que les lois fournies par l'induction seront toutes vraies, ni qu'elles seront suffisantes.

On reconnaîtra leur fausseté, lorsque combinées par les procédés logiques, elles aboutiront à des conséquences contradictoires, ou lorsque les faits nouveaux qu'elles conduiraient à prévoir seront en désaccord avec la réalité objective.

Il peut se faire, d'autre part, que les lois admises ne soient pas toutes distinctes et indépendantes entre elles, et que quelques-unes d'entre elles fassent partie des conséquences que l'on peut tirer de la combinaison des autres.

On voit ainsi quel est le rôle, dans l'établissement des principes, de la partie de la science qni s'occupe de leur combinaison, abstraction faite de leur origine expérimentale et des rapports de leurs conséquences avec les faits réels. C'est elle qui doit constater d'abord si les principes sont compatibles entre eux, et ensuite s'ils sont irréductibles à un moindre nombre. Une science fondée sur des principes qui satisfont à ces conditions est absolument vraie, au point de vue rationnel et abstrait, quand même elle ne se trouverait pas conforme aux faits réels qu'elle était destinée à représenter. C'est, dans ce cas, à la partie expérimentale et inductive qu'il faut s'en prendre; ce sont les hypothèses fondamentales qu'il faut changer. La partie purement logique, quoique devenue inutile, était irréprochable.

Cette partie logique des sciences exactes constitue ce qu'on appelle les *Mathématiques* proprement dites. Celles-ci se divisent à leur tour en *Mathématiques pures*, contenant les théories logiques applicables à l'étude de toutes les classes de faits indistinctement, et en *Mathématiques appli-*

quées, traitant de l'application de ces théories générales à des classes particulières de faits, et des procédés spéciaux qui s'adaptent le mieux à chacune de ces classes.

II

On donne le nom d'*opération* à l'acte qui transforme un phénomène dans un autre, de sorte qu'à une succession de phénomènes correspond une combinaison d'opérations.

Pour appliquer la Logique à la combinaison des opérations, il n'est nullement nécessaire de connaître leur sens réel et la manière dont elles s'exécutent. Il suffit d'avoir constaté certaines propriétés abstraites de ces opérations, auxquelles on pourrait donner le nom de *propriétés* combinatoires (1). On peut construire une théorie abstraite des opérations fondée uniquement sur la considération de ces propriétés, et comprenant ainsi comme cas particulier l'Algèbre ordinaire.

Un nombre étant la loi de formation d'une quantité par l'addition d'unités égales, l'Arithmétique n'est autre chose que la théorie abstraite de la combinaison de cette sorte d'opérations.

Les opérations peuvent être simples, comme le sont les opérations fondamentales de l'Algèbre ; elles jouissent alors de propriétés simples, et la théorie de leur combinaison peut recevoir un grand développement. D'autres fois, elles sont d'une nature plus complexe : telles sont les constructions géométriques, dont la combinaison se fait le plus souvent suivant des lois spéciales pour chaque cas particulier, sans qu'on puisse la soumettre à des procédés généraux.

Les opérations complexes peuvent généralement se ramener aux opérations simples. C'est cette décompositon d'opérations dans leurs éléments qui caractérise les théories dites *analytiques* (Géométrie analytique, Mécanique analytique,

---

(1) Pour en donner un exemple, la théorie de la multiplication algébrique repose tout entière sur les propriétés exprimées par les égalités suivantes :

1° Pour $a = a'$, $b = b'$, on a $a \,.\, b' = a \,.\, b'$ (*uniformité, eindeutigkeit*) ;
2° $(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c$ (propriété *distributive*) ;
3° $a \,.\, b = b \,.\, a$ (propriété *communicative*);
4° $(a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, b \,.\, c)$ (propriété *associative*);
5° $a \times 0 = 0$;
6° $a \times 1 = a$.

etc.). On donne le nom de *synthétiques* aux théories où l'on emploie immédiatement les opérations complexes.

La différence essentielle entre les théories analytiques et les théories synthétiques tient ainsi à ce que, dans les premières, les opérations ont des propriétés simples, qui permettent d'établir des procédés généraux pour leur combinaison, et fournissent des méthodes régulières et directes pour la solution des problèmes. Dans les théories synthétiques, au contraire, la complication et la variété plus grande des opérations s'opposent à la formation de règles simples pour leur application, et la solution, tout en exigeant moins d'intermédiaires, est d'ordinaire le résultat d'un tâtonnement, que l'exercice, bien plus que les méthodes générales, peut mettre en mesure d'abréger.

(*A suivre.*)

QUESTIONS POSÉES DANS DES EXAMENS ANGLAIS.

1. Trouver un nombre de deux chiffres tel que si on le divise par le produit de ses deux chiffres, on obtienne comme quotient $\frac{16}{3}$ et que si on retranche 9 du nombre cherché, on retrouve le même nombre renversé.

2. Démontrer que si un côté d'un triangle est divisé en deux parties égales, il n'y a pas d'autre ligne terminée aux deux mêmes côtés et divisée par le même point en deux parties égales.

3. Si une racine de l'équation $x^2 + px + q = 0$ est réciproque d'une racine de l'équation $x^2 + rx + s = 0$, on a la relation $(ps - r)(qr - p) = (qs - 1)^2$.

4. La différence entre deux nombres est 48; la différence entre le moyen arithmétique et le moyen géométrique est 18. Trouver ces deux nombres.

5. Simplifier l'expression

$$(a + b + c)(x + y + z) + (a + b - c)(x + y - z) + (b + c - a)(y + z - x) + (c + a - b)(z + x - y).$$

6. Éliminer x, y, z entre les équations.

$$x+y+z=a; \qquad x^2+y^2+z^2=b^2;$$
$$x^3+y^3+z^3=3c^2; \qquad xyz=a^3.$$

7. Résoudre

$$\sqrt{3+\sqrt{x}}+\sqrt{4-\sqrt{x}}=\sqrt{7+2\sqrt{x}}.$$

8. Résoudre

$$x+\sqrt{y+x}=12-y;$$
$$x^2=41-y^2.$$

9. Résoudre

$$x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=10$$
$$x^2+y^2=17.$$

10. Résoudre

$$\text{Sin } x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

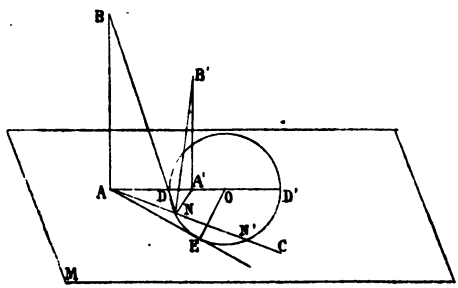
11. Résoudre $2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2.$

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

QUESTION 3.

Solution par M. Nepveu, élève du Lycée de Châteauroux.

Deux droites AB *et* A'B' *sont perpendiculaires à un même plan* M *aux points donnés* A *et* A'. *On sait que la longueur de* AB *est double de celle de* A'B'. *Par le pied* A *de* AB, *on tire dans le plan* M *une droite* AC *faisant avec* AA' *un angle donné. Cela posé, on demande de trouver sur la droite* AC *un point d'où l'on verrait les longueurs* AB *et* A'B' *sous des angles égaux. Discussion sommaire de la question.*



Les constructions indiquées étant faites et N étant un des points cherchés, nous remarquons que les triangles ABN et A'B'N sont semblables et que leur rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. Le point N doit donc se trouver à l'intersection de la droite AC et du

lieu des points dont les distances à deux points fixes A et A′ sont dans un rapport donné. Ce lieu est une circonférence décrite sur la distance des points conjugués de A et A′ comme diamètre.

Les distances des deux extrémités D et D′ de ce diamètre au point A′ sont données par les égalités de rapports

$$\frac{DA'}{DA} = \frac{D'A'}{D'A} = \frac{1}{2}$$

en posant $AA' = a$

nous en concluons $D'A' = a$, $DA' = \frac{1}{3}a$.

Le diamètre DD′ de cette circonférence est

$$DD' = AO = \frac{4a}{3}.$$

Le problème a en général deux solutions. Ces deux solutions se confondent lorsque la droite AC est tangente à la circonférence. Nous avons alors dans le triangle rectangle AOE, l'hypoténuse OA égale au double du côté OE de l'angle droit : l'angle opposé à ce côté vaut donc 30°.

Quand l'angle A′AC compté de part et d'autre de AA′ est supérieur à 30° le problème est impossible.

Solution généralisée. — Supposons qu'on doive avoir $AB = nA'B'$. Alors N étant un des points cherchés, les triangles NAB, NA′B′ étant semblables, on a

$$\frac{NA}{NA'} = \frac{1}{n}.$$

On voit que le point N se trouve à l'intersection de la droite AC et de la circonférence décrite sur la distance des points conjugués harmoniques de A et de A′ comme diamètre. Le problème a donc en général deux solutions. Les distances des deux extrémités D et D′ du diamètre au point A′ sont données par les égalités

$$\frac{DA'}{DA} = \frac{D'A'}{D'A} = \frac{1}{n}$$

et en posant $AA' = a$, on obtient

$$DA' = \frac{a}{n+1}, \quad D'A' = \frac{a}{n-1}$$

et par suite $DD' = \dfrac{2an}{n^2 - 1}$.

Pour $n = +\infty$ les deux points D et D′ se confondent avec le point A′ et la distance A′B′ est nulle en supposant que celle de AB soit finie; n décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à $+2$, valeur qui correspond au cas de la question posée, le diamètre du cercle croît depuis zéro jusqu'à la valeur $\frac{4a}{3}$. Dans ce cas la distance du centre O de la circonférence au point A est égale au diamètre $\frac{4a}{3}$; par suite la tangente menée du point A à la circonférence forme avec le rayon mené au point de contact un triangle rectangle dans lequel l'angle opposé à ce rayon vaut 30°. On voit donc que dans la question posée le problème devient impossible au moment où l'angle A′AC devient supérieur à 30° de part et d'autre de AA′. n décroissant depuis 2 jusqu'à 1, le diamètre du cercle croît jusqu'à l'infini; le point D a pour limite le milieu de AA′ et le point D, est situé à l'infini. Le cercle s'est transformé en une perpendiculaire indéfinie menée par le milieu de AA′ et le problème n'admet alors qu'une solution, le second point d'intersection de la droite AC et du cercle s'étant éloigné indéfiniment. Enfin, n décroissant de 1 jusqu'à zéro le point D′ se trouve sur le prolongement de AA′ et se rapproche indéfiniment de A avec le point D.

A la limite, c'est-à-dire pour $n = 0$ ces deux points se confondent avec A et le diamètre du cercle est devenu nul.

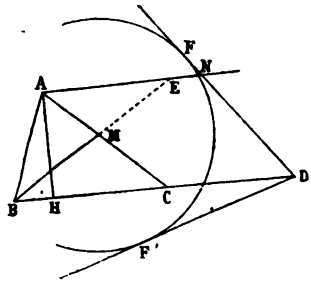
Si l'on continue à faire décroître n de zéro à $-\infty$, on voit que cela revient à compter les distances AB et A′B′ de part et d'autre du plan M et que les mêmes circonstances géométriques se reproduiront.

QUESTION 26.

Solution par M. Perrin, élève du Lycée de Clermont-Ferrand.

Construire un triangle connaissant la somme a + b *de deux côtés, la médiane correspondante au côté* b *et la hauteur correspondante au côté* a.

Soit ABC le triangle demandé, AH la hauteur et BM la médiane données.



Prolongeons BM d'une longueur ME = BM. Tirons la droite AE, cette droite est parallèle à BC. Supposons BD = $a + b$. Menons par le point D une parallèle DN à AC. Les points M et D étant connus, nous sommes ramenés à un cas particulier du problème connu :

Étant données deux droites parallèles et deux points M et D *dans leur plan, mener par ces points deux sécantes parallèles qui forment avec les deux autres un losange* ACDN.

Du point M comme centre avec AH pour rayon décrivons un cercle et du point D menons à ce cercle la tangente DF : La parallèle CMA à cette tangente est le côté b du triangle cherché; en joignant AB, nous aurons le triangle demandé.

Discussion : La tangente DF' donne une seconde solution. Le problème n'en admet qu'une si le point D est sur la circonférence MF, et n'en admet aucune si ce point est à l'intérieur.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chanier, lycée de Clermont; Joire, lycée de Saint-Omer; Lainey, collége de Cherbourg; Delarue, lycée Fontanes, institution Marc-Dastès; Pradel, lycée de Mautauban; Cordeau, école Lavoisier; Bailly, petit séminaire de Belley; Hugentobler, école J.-B. Say; Nigri, Pau.

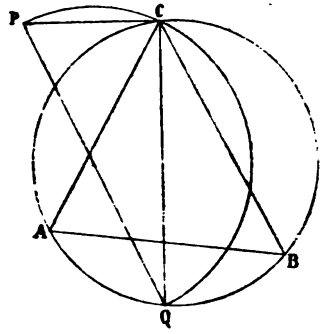
CONCOURS GÉNÉRAL DE 1876

Classe de troisième.

Solution par M. Douliot, élève du Collége de Langres.

Construire un triangle ABC, *connaissant la base* AB, *l'angle au sommet et un point* P *de la bissectrice de l'angle formé au point* C *par le côté* AC *et le prolongement de* BC.

Sur le côté AB donné, décrivons un segment capable de l'angle donné. L'arc ACB est un lieu du sommet C. Cherchons



un second lieu de ce sommet. Pour cela nous remarquerons que les bissectrices de l'angle C et de son supplément se coupent à angle droit. Or on connaît un point P de la bissectrice de l'angle supplémentaire de ACB, et un point de la bissectrice de ACB, le point Q milieu de l'arc AB. Joignons PQ. Si sur cette droite comme diamètre nous décrivons une circonférence, nous aurons un second lieu du point C. Il coupe le premier en C; le point C est donc le sommet cherché. Joignant CA et CB on aura le triangle ACB qui répondra à la question.

QUESTIONS PROPOSÉES

---

35. — On donne une circonférence O, une droite indéfinie Ax, et un point A sur cette droite. Un angle C, de grandeur constante, a son sommet sur la circonférence O, et l'un de ses côtés passe par le point A. Déterminer la position du sommet de telle manière que le segment AB, intercepté par l'angle sur la droite Ax, soit maximum ou minimum.

(Hallowell.)

36. — Si l'on mène les diamètres passant par les sommets d'un triangle inscrit dans une circonférence, on détermine, en joignant les points de division de la circonférence, un hexagone dont le périmètre est égal à 4 fois la somme du rayon du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle.

(Léon Arnoye.)

37. — Inscrire dans une sphère un cône dont la surface totale, augmentée de la surface latérale, soit égale à la surface de la sphère. *(L. Julliard.)*

38. — Si l'on a $n = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, on a les deux identités suivantes :

$$6n^2 = (x+y)^4 + (x+z)^4 + (x+u)^4 + (y+z)^4 + (y+u)^4 + (z+u)^4 + (x-y)^4 + (x-z)^4 + (x-u)^4 + (y-z)^4 + (y-u)^4 + (z-u)^4;$$

$$10n^3 = (x+y)^6 + (x+z)^6 + (x+u)^6 + (y+z)^6 + (y+u)^6 + (z+u)^6 + (x-y)^6 + (x-z)^6 + (x-u)^6 + (y-z)^6 + (y-u)^6 + (z-u)^6 + 4x^6 + 4y^6 + 4z^6 + 4u^6.$$

(Ed. Lucas.)

39. — Si l'on a $n = x^2 + y^2 + z^2$, on a aussi

$$24n^2 = 2(x+y+z)^4 + 2(x+y-z)^4 + 2(y+z-x)^4 + 2(z+x-y)^4 + (2x)^4 + (2y)^4 + (2z)^4.$$

(Ed. Lucas.)

40. — Toute puissance entière n^α d'un nombre entier est toujours égale à la somme de n termes consécutifs, pris dans la suite naturelle des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11... Application au cas où $\alpha = 3$, et où n reçoit successivement les valeurs 1, 2, 3... *(de Montferrier.)*

41. — Inscrire dans une sphère donnée un prisme triangulaire régulier de volume maximum. — Ce maximum est égal au cube du rayon de la sphère. *(Martus.)*

42. — De l'égalité : $2\cos\theta = u + \frac{1}{u}$, on tire $2\cos n\theta = u^n + \frac{1}{u^n}$

43. — Démontrer que si, dans un triangle ABC, on mène les trois hauteurs AD, BE, CF qui se coupent au point P, on a $PA^2 . PB^2 . PC^2 = 8R^3 . PD . PE . PF$.

44. — Une figure plane se meut de telle manière que deux droites fixées invariablement à cette figure passent par deux points fixes. Une autre droite quelconque invariablement liée à la figure mobile est toujours tangente à un centre fixe. *(The Educational Times.)*

Circonférence

CORRESPONDANCE

Relations entre les éléments d'un triangle.

Appelons
a, b, c les côtés,
r le rayon du cercle inscrit,
r_1 r_2 r_3 les rayons des cercles ex-inscrits,
R le rayon du cercle circonscrit,
p le demi-périmètre,
T la surface du triangle.

On trouve facilement :

(1) $$T = pr = (p - a)\, r_1 = (p - b)\, r_2 = (p - c)\, r_3.$$

M. Boset, professeur à l'athénée de Namur, remarque qu'on en déduit facilement :

(2) $$\begin{cases} a^2 = (r_1 - r)\,(r_2 + r_3) \\ b^2 = (r_2 - r_1)\,(r_3 + r_1) \\ c^2 = (r_3 - r)\,(r_1 + r_2) \end{cases}$$

On peut se proposer de trouver directement ces relations par des considérations géométriques.

M. Catalan a démontré (*Théorèmes et problèmes*, livre II) que

(3) $$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$$

On en déduit :

(4) $$a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2.$$

M. Boset démontre géométriquement cette dernière formule, en faisant voir d'abord que :

(5) $$\begin{cases} a^2 + (r_1 - r)^2 = 4R\,(r_1 - r) \\ b^2 + (r_2 - r)^2 = 4R\,(r_2 - r) \\ c^2 + (r_3 - r)^2 = 4R\,(r_3 - r) \end{cases}$$

Nous ne faisons qu'indiquer ces relations; nous insérerons volontiers dans le journal les démonstrations simples que nos lecteurs voudront bien nous envoyer.

Nous nous proposons de rassembler dans un article de notre journal les relations connues entre les principaux éléments linéaires d'un triangle, entre les angles, entre les éléments linéaires et les angles. Nous prions nos lecteurs de nous envoyer toutes celles qu'ils connaissent, afin que notre collection soit aussi complète que possible.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 4930-7.

APPLICATION
DE LA
THÉORIE DES DÉTERMINANTS
A LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE m ÉQUATIONS HOMOGÈNES DU PREMIER DEGRÉ A $m+1$ INCONNUES.

(Suite. — Voir page 53.)

Définition. — Une équation homogène du premier degré est de la forme

$$ax + by + cz + du + \text{etc.} = 0$$

Une pareille équation ne renferme pas de terme indépendant des inconnues.

Théorème 1. — *Un système de* m *équations homogènes du premier degré à* m + 1 *inconnues a une infinité de solutions pour lesquelles les inconnues ne sont pas toutes nulles.*

1° Soit une équation à deux inconnues

$$ax + by = 0$$

Si b n'est pas nul, on pourra tirer y en fonction de x; en donnant à x une valeur quelconque autre que zéro on en déduira une valeur correspondante finie et déterminée pour y.

Si $b = 0$, on peut faire $x = 0$ et prendre pour y une valeur quelconque finie différente de zéro.

Le théorème est donc démontré pour ce cas.

2° Soient les deux équations :

$$ax + by + cz = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$

Si c et c' ne sont pas nuls tous deux, on tirera de l'une la valeur de z

$$z = -\frac{ax + by}{c}$$

Si $c \lessgtr 0$; on substituera dans la seconde qui prendra la forme

$$Ax + By = 0$$

Cette équation a une infinité de solutions pour lesquelles x et y ne sont pas tous deux nuls; chaque solution donnera pour z une valeur finie et déterminée; le système a donc

une infinité de solutions telles que x, y, z ne soient pas nuls tous trois.

Si $c = c' = 0$, on pourra faire $x = 0$, $y = 0$ et prendre pour z une valeur γ finie quelconque différente de zéro ; le théorème est encore vrai dans ce cas.

3° Le système de 3 équations à 4 inconnues se ramène, par un raisonnement semblable, à celui de 2 équations à 3 inconnues.

On voit donc que le théorème est général.

Théorème 2. — *Par trois points pris sur un plan on peut faire passer un seul cercle ou une infinité.*

Nous savons que l'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires est,

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

Soient donnés 3 points $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$ sur le plan ; les coefficients A, B, C, D devront satisfaire aux 3 équations homogènes

$$A(x_1^2 + y_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + D = 0$$
$$A(x_2^2 + y_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + D = 0$$
$$A(x_3^2 + y_3^2) + Bx_3 + Cy_3 + D = 0$$

Ce système, d'après le théorème qui précède, a une infinité de solutions pour lesquelles les coefficients A, B, C, D ne sont pas tous nuls. Considérons une de ces solutions, elle correspond à un cercle passant par les 3 points. Ce cercle peut se réduire à une droite, dans le cas où A serait nul ; on dit alors qu'il se réduit à une droite à distance finie et à la droite de l'infini.

Divisons les coefficients A, B, C, D, par celui qui n'est pas nul, nous aurons un système de 3 équations à 3 inconnues qui admet une solution ; donc si le déterminant des coefficients des rapports n'est pas nul, il n'admettra que cette solution. Si le déterminant des coefficients des rapports est nul, il en admettra une infinité ; c. q. f. d.

Théorème 3. — *Par quatre points arbitrairement choisis dans l'espace on peut faire passer une sphère ou une infinité.*

L'équation d'une sphère, en coordonnées rectangulaires est :

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + E = 0$$

elle renferme 5 coefficients. Si 4 points

$$x_1\ y_1,\ x_2\ y_2,\ x_3\ y_3,\ x_4\ y_4$$

sont donnés, ces coefficients satisfont aux 4 équations homogènes

$$A(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + Dz_1 + E = 0$$
$$A(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + Dz_2 + E = 0$$
$$A(x_3^3 + y_3^3 + z_3^3) + Bx_3 + Cy_3 + Dz_3 + E = 0$$
$$A(x_4^4 + y_4^4 + z_4^4) + Bx_4 + Cy_4 + Dz_4 + E = 0$$

Ces 4 équations admettent pour solution un système de valeurs A B C D E

telles que toutes ne soient pas nulles; donc il passe par ces quatre points une sphère, qui peut se réduire à un plan.

Divisons les 4 équations par l'un des coefficients différent de zéro, nous aurons un système de 4 équations du premier degré à 4 inconnues qui admet une solution déterminée et finie.

Si donc le déterminant des coefficients est différent de zéro, il n'admet que cette solution; s'il est nul il en admet une infinité; c. q. f. d.

On démontrerait par un raisonnement semblable les théorèmes suivants :

Théorème 4. — Par cinq points pris au hasard sur un plan, on peut faire passer une seule conique ou une infinité de coniques.

Théorème 5. — Par neuf points pris au hasard dans l'espace on peut faire passer une surface du second degré ou une infinité, etc. J. B.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
D'UN THÉORÈME D'ALGÈBRE

par M. Eugène Rouché

Si un polynôme entier et de degré m *par rapport à* x *s'annule pour* m + 1 *valeurs de* x, *les coefficients des diverses puissances de* x *sont égaux à zéro.*

Le théorème est évident pour un polynôme du premier degré; car, si un tel polynôme

$$A_0x + A_1$$

s'annule pour deux valeurs distinctes a et b de x, c'est-à-dire si l'on a

$$A_0a + A_1 = 0 \text{ et } A_0b + A_1 = 0,$$

on aura, en retranchant,

$$A_0\,(a - b) = 0;$$

d'où l'on conclut $A_0 = 0$;

et par suite, en remontant, $A_1 = 0$.

Il suffit donc de faire voir que si le théorème est vrai pour tout polynôme de degré $m - 1$, il subsiste pour tout polynôme de degré m.

Or soit: $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots$

un polynôme entier et de degré m qui s'annule pour $m + 1$ valeurs $a, b, c, \ldots$ de x; ce polynôme, devenant nul pour $x = a$, sera divisible par $x - a$, et le quotient

$$B_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} + \ldots\ldots$$

sera un polynôme entier et de degré $m - 1$ qui, devant s'annuler pour les m valeurs $b, c, \ldots$ de x, aura tous ses coefficients nuls, par hypothèse. Mais, d'après la loi bien connue de la division par $x - a$, on a

$$B_0 = A_0,\ B_1 = B_0a + A_1,\ B_2 = B_1\,a + A_2 \ldots$$

on aura donc successivement, puisque $B_0, B_1, B_2 \ldots$ sont nuls :

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0 \ldots$$

ce qu'il fallait démontrer.

DE L'INVOLUTION

par M. **Vazeille**, professeur de mathématiques spéciales à Sainte-Barbe.

Définition. — Deux points M et M′ se déplaçant ensemble sur une droite fixe, sont dits en *involution* si leurs distances u, v à un point fixe de la droite satisfont à une relation de la forme

$$\alpha uv + \beta(u + v) + \gamma = 0.$$

Cette relation est symétriquement composée en u et v; à

chaque point M correspond un seul point M′ et ces deux points se substituent réciproquement l'un à l'autre.

Si on fait un changement arbitraire d'origine sur la droite, la relation devient

$$\alpha(u + \lambda)(v + \lambda) + \beta(u + v + 2\lambda) + \gamma = 0,$$

ou bien :

$$\alpha uv + (\alpha\lambda + \beta)(u + v) + \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma = 0.$$

Si l'on prend $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$ ce qui est toujours possible, et possible d'une seule manière, la relation primitive prend la forme simple et caractéristique

$$uv = \text{constante}$$

et l'origine nouvelle se nomme *le centre de l'involution.*

Toute involution a un centre et n'en a qu'un.

De là résulte un moyen géométrique de résoudre les questions suivantes :

Connaissant deux couples (A, A′) *et* (B, B′) *d'une involution, construire le centre.*

Faites passer une circonférence par les trois points A, A′, G; une autre par les points B, B′, G, G étant choisi à volonté; la corde commune viendra couper la droite en un point O qui sera le centre de l'involution.

Connaissant deux couples (A, A′) *et* (B, B′) *de l'involution, en déterminer un autre couple quelconque.*

Ayant fait la construction précédente, menez une 3e circonférence passant par les deux points G et H, communs aux deux premières; cette circonférence viendra déterminer deux points M, M′ qui forment un nouveau couple de l'involution.

La relation caractéristique étant mise sous la forme

$$uv = \text{constante},$$

si la constante est positive et a pour valeur p^2, on peut poser $u = v$ et alors

$$u = v = \pm p.$$

Donc alors *l'involution a deux points doubles.* Ces deux points doubles sont également éloignés du centre d'involution; leur distance commune au centre d'involution est égale à la longueur OT de la tangente menée de ce centre à

l'une quelconque des circonférences qui passent par G et H. Ces deux points doubles P et Q sont aussi les points de contact avec la droite fixe des deux circonférences qui passant par G et H touchent en outre cette droite. Mais l'existence des deux points doubles suppose essentiellement que la *constante* est positive, c'est-à-dire que le point O, centre de l'involution, est en dehors de chacun des segments AA', BB', MM'...

Lorsque la constante est négative, nous disons que l'involution a *deux points doubles imaginaires;* et nous allons donner un moyen géométrique de construire sur une droite une involution ayant ses points doubles imaginaires : qu'un angle droit $R\widehat{O}S$ tourne autour de son sommet; les intersections M, M', de ses deux côtés par une droite fixe *uv* se déplacent en involution; c'est évident, car les deux points M et M' sont de part et d'autre du point C projection du point O sur *uv*, et on a

$$CM \,.\, CM' = \overline{OC}^2 = h^2$$

donc la relation d'involution, en mettant l'origine au point C, est :

$$uv = -h^2$$

inversement, il est évident que toute division en involution, à points doubles imaginaires, peut être produite par le pivotement d'un angle droit convenablement choisi.

On sait que lorsque deux points M, M' divisent harmoniquement un segment déterminé AB, il existe la relation

$$CM \,.\, CM' = \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2$$

C étant le milieu de AB; donc *dans une involution, la distance des deux points doubles est divisée harmoniquement par tout couple de points* (M, M') *de l'involution.*

(A suivre.)

PROPRIÉTÉS NOUVELLES
DES
POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

par Georges Dostor.

---

1. Dans l'étude de ces propriétés, nous ferons intervenir pour la première fois le rayon de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre régulier.

Soient O le *centre* d'un polyèdre régulier convexe, AB une *arête* de ce polyèdre et C le centre de l'une des deux faces auxquelles appartient cette arête. *(Le lecteur est prié de faire la figure.)*

Menons CI perpendiculaire sur l'arête AB, puis tirons les droites OI et OA; le point I est nécessairement le milieu de l'arête AB et la ligne OI est perpendiculaire sur cette arête.

Cela fait, il est évident que la droite OC est le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier, que OA est le rayon R de la sphère circonscrite, et que OI est le rayon de la sphère tangente aux arêtes. Nous représenterons ce dernier rayon par ρ.

Tirons les droites OB, CA et CB.

Supposons que chaque face du polyèdre ait n côtés, et que m soit le nombre des arêtes qui aboutissent à chaque sommet.

Par le rayon OA de la sphère circonscrite et par chacune des m arêtes, telles que AB, qui sont issues de son extrémité A, menons un plan; ces m plans diviseront en m parties égales l'espace rempli par les quatre dièdres droits que l'on peut former autour du rayon OA; par conséquent, chacune de ces m parties est égale à $\frac{2\pi}{m}$.

Or le dièdre COAI, compris entre les deux plans OAC et OAI, est la moitié de l'une de ces m parties; donc on a le dièdre COAI $= \frac{\pi}{m}$.

Il est évident d'ailleurs que l'angle ACI $= \frac{\pi}{n}$.

2. *Relation entre le rayon de la sphère inscrite et le rayon de la sphère tangente aux arêtes.* Projetons sur la face ACO chacune des trois autres faces CIO, AIO et ACI du tétraèdre IACO; nous obtenons l'égalité

$$\text{ACO} = \text{CIO} \cos \text{ACI} + \text{AIO} \cos \text{COAI} + \text{ACI} \cos \text{ACOI}$$

Or $\cos \text{ACI} = \cos \frac{\pi}{n}$, $\cos \text{COAI} = \cos \frac{\pi}{m}$,

et $\cos \text{ACOI} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$; donc il vient

$$(1) \qquad ACO = CIO \cos\frac{\pi}{n} + AIO \cos\frac{\pi}{m}.$$

Mais nous avons

le triangle $ACO = \frac{1}{2} r \,.\, AC$,

le triangle $CIO = \frac{1}{2} r \,.\, CI = \frac{1}{2} r \,.\, AC \cos\frac{\pi}{n}$,

et le triangle $AIO = \frac{1}{2} \rho \,.\, AI = \frac{1}{2} \rho \,.\, AC \sin\frac{\pi}{n}$.

Il vient donc, en substituant dans (1) et en divisant le résultat par $\frac{1}{2}$ AC,

$$r = r \cos^2 \frac{\pi}{n} + \rho \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{m}.$$

Faisant passer $r \cos^2 \frac{\pi}{n}$ dans le premier membre, puis divisant par $\sin\frac{\pi}{n}$, on obtient successivement,

$$2 - r \cos^2 \frac{\pi}{n} = \rho \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{m},$$

$$r \sin^2 \frac{\pi}{n} = \rho \sin\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{m},$$

$$(I) \qquad r \sin\frac{\pi}{n} = \rho \cos\frac{\pi}{m}.$$

Telle est la *relation* qui existe *entre le rayon* r *de la sphère inscrite et le rayon* ρ *de la sphère tangente aux arêtes.*

3. Si nous appliquons cette formule (I) aux cinq polyèdres réguliers convexes, nous obtenons les résultats suivants :

Tétraèdre : $n = 3$, $m = 3$; $r \sin 60^\circ = \rho \cos 60^\circ$,
$r\sqrt{3} = \rho$.

Hexaèdre : $n = 4$, $m = 3$; $r \sin 45^\circ = \rho \cos 60^\circ$,
$r\sqrt{2} = \rho$.

Octaèdre : $n = 3$, $m = 4$; $r \sin 60^\circ = \rho \cos 45^\circ$,
$r\sqrt{3} = \rho\sqrt{2}$.

Dodécaèdre : $n = 5$, $m = 3$; $r \sin 36^\circ = \rho \cos 60^\circ$,

$$r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\rho.$$

Isocaèdre : $n = 3$, $m = 5$; $r \sin 60^\circ = \rho \cos 36^\circ$,

$$2r\sqrt{3} = \rho(\sqrt{5} + 1).$$

4. *Relation entre le rayon* R *de la sphère circonscrite et celui* ρ *de la sphère tangente aux arêtes.* Le triangle rectangle AIO donne $\overline{OA}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AC}^2 \sin^2\frac{\pi}{n} = \overline{OI}^2 + (\overline{AO}^2 - \overline{OC}^2) \sin^2\frac{\pi}{n}$,

ou
$$R^2 = \rho^2 + (R^2 - r^2)\sin^2\frac{\pi}{n}.$$

On en déduit

$$R^2\cos^2\frac{\pi}{n} = \rho^2 - r^2\sin^2\frac{\pi}{n}.$$

Remplaçant $r \sin\frac{\pi}{n}$ par sa valeur $\rho\cos\frac{\pi}{m}$ tirée de (I),

on obtient
$$R^2\cos^2\frac{\pi}{n} = \rho^2 - \rho^2\cos^2\frac{\pi}{m}.$$

ou bien (II)
$$R\cos\frac{\pi}{n} = \rho\sin\frac{\pi}{m}.$$

5. Cette relation (II) donne pour les cinq polyèdres convexes :

Tétraèdre : $R\cos\frac{\pi}{3} = \rho\sin\frac{\pi}{3}$, $R = \rho\sqrt{3}$.

Hexaèdre : $R\cos\frac{\pi}{4} = \rho\sin\frac{\pi}{3}$, $R\sqrt{2} = \rho\sqrt{3}$.

Octaèdre : $R\cos\frac{\pi}{3} = \rho\sin\frac{\pi}{4}$, $R = \rho\sqrt{2}$.

Dodécaèdre : $R\cos\frac{\pi}{5} = \rho\sin\frac{\pi}{3}$, $R(\sqrt{5} + 1) = 2\rho\sqrt{3}$

Isocaèdre : $R\cos\frac{\pi}{3} = \rho\sin\frac{\pi}{5}$, $2R$

$$= \rho\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

6. *Relation entre le rayon* r *de la sphère inscrite et celui* R *de la sphère circonscrite.* Si nous divisons membre à membre les égalités (II) et (I), nous trouverons de suite la relation connue (III) $\frac{R}{r} = \tang \frac{\pi}{m} \tang \frac{\pi}{n}$

7. Cette relation donne pour les polyèdres réguliers convexes les rapports suivants :

Tétraèdre : $n = 3$, $m = 3$; $R = 3r$.

Hexaèdre : $n = 4$, $m = 3$; $R = r\sqrt{3}$.

Octaèdre : $n = 3$, $m = 4$; $R = r\sqrt{3}$.

Dodécaèdre : $n = 5$, $m = 3$; $R(\sqrt{5} + 1) = r\sqrt{3(10 - 2\sqrt{5})}$.

Icosaèdre : $n = 3$, $m = 5$; $R(\sqrt{5} + 1) = r\sqrt{3(10 - 2\sqrt{5}}$.

On en conclut que, *si deux polyèdres conjugués* (l'hexaèdre et l'octaèdre, ou le dodécaèdre et l'icosaèdre) *sont inscrits dans la même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère,* et réciproquement; ce qui d'ailleurs était connu.

(*A suivre.*)

QUESTIONS

POSÉES DANS L'EXAMEN ORAL DU CONCOURS DE SAINT-CYR.

(Suite. — Voir page 114.)

Progressions. — Logarithmes. — Annuités.

1. — Est-il possible de trouver une progression telle que la somme de ses n premiers termes soit égale à $5n^2$?

2. — Inscrire trois moyens proportionnels entre 2 et 5. Calculer le premier moyen à 0,01 près.

3. — Calculer au moyen des logarithmes l'expression $y = \frac{120\sqrt{8}}{3 + \sqrt{7 + \sqrt{8}}}$ à 0,01 près.

4. — Faire la somme des termes de la progression $1 + \frac{7}{8} + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \ldots$ — Tend-elle vers une limite. Quelle est cette limite?

5. — Soit $a = \frac{24,4}{\sqrt[4]{3}}$ Calculer cette valeur par logarithmes.

6. — On a emprunté 100000 francs à 5 o/o. Quelle annuité devra-t-o payer pour se libérer en 20 ans?

7. — Un propriétaire emprunte 100000 francs au taux de 5,5 o/o. Quelle est l'annuité qu'il doit verser pour être libéré de sa dette en 50 ans?

Trigonométrie. — Formules générales.

1. — Calculer $\cot g \frac{a}{2}$ en fonction de $\cot g\ a$. Discuter les résultats obtenus.

2. — Etablir la formule $\sin(a + b)$, en déduire $\cos(a + b)$.

3. — Calculer $\cos 4a$ en fonction de $\cos a$, $\cos \frac{a}{4}$ en fonction de $\cos a$.

Peut-on prévoir si les valeurs que l'on trouvera sont réelles?

4. — Trouver $\tan g \frac{a}{2}$ en fonction de $\tan g\ a$.

5. — Trouver $tg \frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$. Peut-on savoir d'avance combien de valeurs réelles on doit trouver?

6. — Connaissant

$$Tg\ (a + b) = \frac{tg\ a + tg\ b}{1 - tg\ a\ tg\ b}$$

Chercher $tg\ (a + b + c)$.

Qu'arrive-t-il quand $a + b + c = 180$?

Démontrer que lorsqu'on a $tg\ a + tg\ b + tg\ c = tg\ a\ tg\ b\ tg\ c$, $a + b + c = K\pi$, K étant entier et positif. — Chercher $tg\ (a + b + c + d)$.

7. — Trouver $Tang\ (a + b)$ quand on connaît $tg\ a$ et $tg\ b$. — Que devient la formule obtenue quand $a + b = 90°$?

De ce que $1 - tg\ a\ tg\ b = 0$ peut-on conclure que $(a + b) = 90°$?

8. — Connaissant $tg\ 15°$, calculer la tangente de 7 degrés 30 minutes.

9. — Calculer le sinus, la tangente et le cosinus de l'arc de 15°.

10. — Démontrer que $\tan g\ 30°$ égale $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. — Etant donné $\sec x = \sqrt{7}$

Calculer $\cos x$ à un millième près.

12. — Calculer $\sin 15°$ par la formule générale

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{\pm\sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}}{2}$$

Quels sont les signes qu'il faut prendre dans cette formule?

Formule à vérifier.

1. — Par erreur on a trouvé

$$1 - \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} :$$

Comment voir qu'il y a une erreur ?

2. — Vérifier la formule

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi - 2a}{4}\right)$$

3. — Démontrer la formule

$$\operatorname{Tg} a + \operatorname{cotg} a = 2 \operatorname{cosec} 2a.$$

Équations trigonométriques.

1. — Résoudre l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c;$$

Chercher la relation qui doit exister entre a, b, c, pour que la solution soit réelle.

2. — Résoudre $\operatorname{Sin} x + \cos x = m$

3. — Quel est le plus petit angle pour lequel

$$\operatorname{Sin} x = - \cos x ?$$

4. — Résoudre $\operatorname{Sin} x = 3 \sin^2 x$

et discuter la formule obtenue.

5. — Résoudre l'équation

$\operatorname{Tang} (45° - x) \operatorname{tang} x = m$. Conditions de réalité. Cas où $m = \frac{1}{8}$. On trouve $\operatorname{tang} x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{16}$. Comment s'y prendre pour calculer cette valeur au moyen des logarithmes ?

6. — Trouver les angles qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{tang}^2 x = m^2.$$

7. — Résoudre $\operatorname{Sin} x \sin (60° - x) = 0,1$.

8. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{Sin} x = 2 \sin (45° - x).$$

9. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{Sin} x = n \cos^2 x$$

en évitant une équation bicarrée.

10. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{Sin} x \sin (\alpha - x) = n \cos^2 x.$$

Discussion.

11. — Calculer l'angle x donné par l'équation

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} (\alpha - x)} = K.$$

12. — Résoudre l'équation

$$\operatorname{Tang} x = 3 \cos x.$$

13. — Résoudre l'équation

$$\text{Sin } x = 2 \sin (45^\circ - x).$$

14. — Résoudre $\text{Sin}^2 x = n \sin (x + \alpha) \cos x.$

15. — Résoudre $\dfrac{\text{Sin } (\alpha + x)}{\text{Sin } (\alpha - x)} = K$

K étant un nombre donné.

16. — Résoudre $\text{Tg } (60^\circ + x) \text{ tg } (60^\circ - x) = K$

Conditions pour que le problème soit possible.

17. — On a $\text{Tang } 2x = \text{cotg } x$;

trouver l'angle x.

18. — Si l'on avait $\dfrac{\text{Cos } 3x}{\text{Cos}^2 x} = 2,$

comment trouverait-on la solution ? Discussion.

19. — Résoudre l'équation

$\dfrac{\text{Cos } 2x}{\text{Cos } x} = K$; pour la discussion on suppose $K > 0$.

20. — On suppose que l'on ait la relation $\text{cotg } 2x = \sin x$.

Trouver les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ qui satisfont à cette relation. Même question pour $\text{cotg } x = \sin x$. On obtient une équation du 2e degré en $\cos x$. Dire quelle est celle des deux solutions qui est à rejeter. Calculer l'angle x avec les tables de logarithmes.

21. — Résoudre l'équation

$$\text{Cotg } x - \text{tg } x = \sin x + \cos x.$$

22. — On a $\sin x + a \cos x = 4$.

Quelles sont les valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ qui satisfont à cette relation ?

Entre quelles valeurs faut-il prendre a pour que les valeurs que l'on obtient pour $\sin x$ et $\cos x$ soient admissibles ? Traiter le problème dans le cas ou $a = 5$.

23. — Résoudre $\dfrac{\text{Sin } 3x}{\text{Sin}^3 x} = m.$

24. — Résoudre $\text{Tang } x - \text{tg } 3x = 2.$

Combien y aura-t-il de solutions comprises entre 0° et 90° ?

25. — On donne l'expression $\text{tg}^2 x - \text{cotg}^2 x = m$ calculer, les angles qui satisfont à cette relation.

26. — On a les relations

$$\text{Sin } x + \cos y = m$$

et

$$x + y = 80^\circ$$

on demande les angles x et y.

27. — Résoudre le système

$$\text{Sin } x = 2 \sin y$$
$$x + y = 60^\circ.$$

28. — Pour quelle valeur de x l'expression $\sin^2 x + 4 \cos x$ est-elle minimum ?

MODÈLE DE CALCUL NUMERIQUE

Résolution d'un triangle. — 4e Cas.

Données :

$a = 7832^m,543$
$b = 9745,657$
$c = 10452,354$
$2p = 28030,554$
$p = 14015,277$
$p-a = 6182,734$
$p-b = 4269,620$
$p-c = 3562,923$

Inconnues :

$A = 45° 28' 00''$
$B = 62\ 29\ 35,45$
$C = 72\ \ 2\ 24,48$

(Vérification) $A + B + C = 179\ 59\ 59,93$

$S = 36\ 306\ 875^m\ 9$

Log p = 4.146.6017				5931
Log $(p-a)$ = 3,791.1806			1782	62,0
Log $(p-b)$ = 3,630.3892		3872	21,0	21,70
Log $(p-c)$ = 3,551.8064	8036	20,4	2,80	2,170
	24,4			
	3,66			

Calcul de r.

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}}$$

Log $(p-a)$ = 3,791.1806
Log $(p-b)$ = 3,630.3892
Log $(p-c)$ = 3,551.8064
Colog p = $\bar{5}$,853.3983
6,826.7745
Log r = 3,413.3872.5

Calcul de A.

$$\text{tg}\ \frac{1}{2}\ A = \frac{r}{p-a}$$

Log r = 3,413.3872.5
Colog $(p-a)$ = $\bar{4}$.208.8194
Log tg $\frac{1}{2}$ A = $\bar{1}$,622 2066

$\frac{1}{2}$ A = 22° 44' 00'' 2066
A = 45. 28. 00 2066

Calcul de B.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{r}{p-b}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } r &= 3{,}413.3872 \\ \text{Colog } (p-b) &= \bar{4}{,}369.6018 \\ \text{Log tg } \tfrac{1}{2} B &= \bar{1}{,}782.9980 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} B = 31° \; 14' \; 47'',72$ 9980

$B = 62. \; 29. \; 35,45$

9613 (475)
397
332,5
345
332,5
125

Calcul de C.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{r}{p-c}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } r &= 3{,}413.3872 \\ \text{Colog } (p-c) &= \bar{4}{,}448.1936 \\ \text{Log tg } \tfrac{1}{2} C &= \bar{1}{,}861.5808 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2} C = 36° \; 1' \; 12'',24$ 5808

$C = 72. \; 24. \; 2,48$

5709 (443)
99
88,6
104
88,6
15,4

Calcul de S.

$$S = pr$$

$$\begin{aligned} \text{Log } r &= 3{,}413.3872 \\ \text{Log } p &= 4{,}146.6017 \\ \text{Log } S &= 7{,}559.9889 \end{aligned}$$

$S = 36306875$ 9889

9784
105
96,0
9,0
84,0
60

QUESTIONS PROPOSÉES

dans le concours de l'École centrale.

On donne un cercle et une droite situés dans un plan. De chaque point du cercle on mène une perpendiculaire sur la droite, et l'on prend chaque fois le milieu M de cette perpendiculaire. Trouver le lieu des points M et discuter l'équation obtenue. *(1re série 1861.)*

On considère dans un cercle donné un système de cordes parallèles et l'on demande le lieu des points qui divisent ces cordes en moyenne et extrême raison. *(2e série, 1861.)*

On donne dans une circonférence déterminée un diamètre fixe AB; on mène les cordes CD parallèles à une direction connue et pour chaque corde on joint respectivement les extrémités C et D aux extrémités A et B du diamètre fixe. On demande le lieu des points M d'intersection des droites AC, BD ainsi obtenus. *(3e série, 1861.)*

On donne dans un plan une droite AB et deux points fixes C et D. Prenant un point S quelconque sur la droite AB on élève aux droites SC et SD par les points C et D les perpendiculaires CM, DM. Trouver le lieu des points M d'intersection de ces perpendiculaires. *(4e série, 1861.)*

On donne un cercle O et un point A. Par ce point on mène une corde dont on prend le milieu I. On abaisse IP perpendiculaire sur le diamètre fixe qui passe par le point A; on prend sur cette perpendiculaire PM = AI, et l'on demande le lieu des points M. On discutera l'équation obtenue pour les diverses positions du point A. *(5e série, 1861.)*

Pour obtenir avec m chiffres exacts le produit de 2 nombres qui ont l'un et l'autre un chiffre autre que 1 pour premier chiffre significatif à gauche, il suffit de prendre chacun de ces nombres avec $m + 1$ chiffres exacts.

Démontrer ce théorème et l'appliquer au calcul du produit $\pi\sqrt{7}$ à 0,001 près. *(Août 1862.)*

Dans un triangle rectangle, on donne la somme s des deux côtés de l'angle droit et la longueur h de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse. Calculer la longueur de l'hypoténuse, déduire de la formule trouvée une construction géométrique de cette longueur, et achever la construction du triangle. (*Août 1862.*)

On donne les 3 côtés d'un triangle

$a = 11331^{m},75$ $c = 29462^{m},55$

$b = 27196^{m},20$ Calculer la surface.

On donne deux axes rectangulaires OX, OY et une parallèle AZ à l'axe des Y, qui intercepte sur l'axe des X un segment OA $= a$. M étant un point quelconque du plan, on le projette en D sur AZ, et l'on mène OM qui coupe AZ en B. Enfin on mène par le point B une parallèle à l'axe des X qui coupe OD en M'. On demande

1° D'exprimer les coordonnées du point M' en fonction de celles du point M et de prouver que la droite MM' passe par un point fixe, c'est-à-dire, indépendant de la position du point M.

2° De trouver le lieu décrit par le point M' lorsque le point M décrit un cercle, dont le rayon est donné, et dont le centre est un point de l'axe des X.

Discuter le problème. (*Août 1862.*)

On donne deux axes rectangulaires OX et OY et un point fixe P; une droite variable AB passant constamment par le point P, coupe respectivement ces deux axes aux points A et B.

1° Trouver en coordonnées rectilignes le lieu des points M de rencontre des parallèles menées aux deux axes par les points A et B.

2° Chercher le lieu décrit par les sommets situés sur l'axe focal du lieu précédent, lorsque le point P se déplace suivant une droite déterminée CD. (*Session auxiliaire 1862.*)

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

posées dans les examens de l'École Centrale.

On donne 1° un plan P passant par la ligne de terre et faisant un angle de 45° avec le plan horizontal; 2° un point *a* du point horizontal, situé à 5 centimètres de la ligne de terre. On demande les traces horizonzale et verticale d'un cône de révolution ayant pour sommet le point A du plan P qui se projette horizontalement en *a*, pour axe la perpendiculaire élevée en A au point P, et pour 1/2 angle au sommet un angle de 40°. *(1861.)*

On donne 1° un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle de 60° avec le plan horizontal; 2° un point *a* du plan horizontal situé à 6 centimètres de la ligne de terre. On demande les traces horizontales et verticales d'un cylindre de révolution ayant pour axe la perpendiculaire élevée au plan donné par le point de ce plan qui se projette horizontalement en *a* et un rayon de 3 centimètres. *(1861.)*

On donne 1° une droite située dans le plan horizontal et faisant un angle de 41° avec la ligne de terre; 2° un point *m* du plan horizontal, pris à volonté entre la droite précédente et la ligne de terre. La droite, en tournant autour de la ligne de terre, engendre un cône. On demande 1° de mener à ce cône un plan tangent par l'un des deux points de la surface qui se projette horizontalement en *m*; 2° de construire les projections de l'intersection de ce plan tangent et d'un cylindre de révolution ayant la ligne de terre pour axe et un rayon de 3 centimètres. *(1861.)*

Deux cercles situés dans le plan horizontal ont leurs centres sur la ligne de terre à 9 centimètres l'un de l'autre et des rayons respectivement égaux à 3 et à 4 centimètres. On mène à ces cercles deux tangentes communes, l'une intérieure A, l'autre extérieure B. La tangente A, en tournant autour de la ligne de terre, engendre un cône. On demande la projection verticale et la vraie grandeur de la

section faite dans ce cône par le plan vertical qui a la tangente B pour trace horizontale. On tracera les asymptotes de la section, si elle en admet. *(1861.)*

On donne une sphère par son centre et son rayon. On fait passer un plan par la ligne de terre et le centre de cette sphère, et l'on demande les projections de la courbe d'intersection des 2 surfaces. On mènera la tangente en un point quelconque de cette intersection. *(1861.)*

On donne 1° une sphère de 4 centimètres de rayon, tangente aux 2 plans de projection; 2° le plan qui passe par les 2 plans de la sphère diamétralement opposés à ses points de contact avec les plans de projection, et dont la trace horizontale fait un angle de 60° avec la ligne de terre.

On demande les projections et la vraie grandeur de la section déterminée par ce plan dans la sphère, ainsi que la tangente en un point de cette section. *(1861.)*

On donne 1° un tétraèdre régulier de 7 centimètres de côté, reposant sur le plan horizontal par une de ses faces; l'une des arêtes de cette face est perpendiculaire à la ligne de terre; 2° un cylindre de révolution de 3 centimètres de rayon, dont l'axe situé dans le plan horizontal et parallèle à la ligne de terre, passe par la projection horizontale du sommet du tétraèdre.

Construire les projections des courbes d'intersection du cylindre et des faces du tétraèdre. *(1861.)*

On donne un cylindre de révolution reposant sur le plan horizontal, et dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre. On demande l'intersection de ce cylindre avec un cône vertical de révolution dont le sommet est sur l'axe du cylindre, et dont la trace horizontale est un cercle de même rayon que la section droite du cylindre. — Construire la tangente en un point de la courbe d'intersection. *(1862.)*

Trouver l'intersection d'un cylindre et d'une sphère définis de la manière suivante :

Le cylindre est droit : sa base est un cercle AB donné sur le plan horizontal (on suppose le diamètre AB parallèle à la

ligne de terre). — La sphère a son rayon égal au diamètre du cylindre, et son centre est sur l'arête du cylindre dont le pied C est à 45° de l'extrémité B du diamètre AB; elle repose d'ailleurs sur le plan horizontal. On mènera la tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection, et l'on en ponctuera la partie cachée en supposant que le cylindre existe seul. *(1862.)*

Trouver l'intersection d'un cône et d'un cylindre définis de la manière suivante :

Le cylindre est droit; sa base est un cercle donné dans le plan horizontal. — Le cône a son sommet sur l'axe du cylindre; sa base est une hyperbole tangente à la base du cylindre et ayant pour asymptotes deux diamètres rectangulaires de cette base, l'un parallèle à la ligne de terre.

On mènera la tangente en un point de la courbe d'intersection, et l'on ponctuera la partie cachée de cette courbe en supposant que le cylindre existe seul. *(1862.)*

Construire les traces et les intersections, en vraie grandeur, de deux cylindres de révolution, dont les axes contenus dans un même plan vertical parallèle au plan vertical de projection se rencontrent en faisant tous deux un angle de 30° avec le plan horizontal. On sait d'ailleurs que le diamètre de la section droite de chaque cylindre est de 8 centimètres. — On construira la tangente en un point de chaque intersection, et on la reportera sur le rabattement correspondant. *(1862.)*

Intersection de deux cônes A et B définis de la manière suivante :

Le cône A est de révolution, son sommet est dans le plan horizontal; son axe est vertical et le 1/2 angle au sommet y est égal à 30°.

Le cône B a pour directrice une section horizontale quelconque du cône A; son sommet est pris arbitrairement dans l'espace, toutefois au-dessus du plan de sa directrice et extérieurement au cône A.

On demande les projections de l'intersection, et la tangente en un point de cette courbe. Pour la ponctuation, on supposera que le cône A existe seul. *(1862.)*

Intersection d une sphère et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, définis de la manière suivante :

L'axe de l'hyperboloïde est vertical, la plus courte distance de la génératrice à cet axe est de 15 millimètres, l'angle que fait la génératrice avec l'axe est de 45°. La sphère passe par le centre du cercle de gorge : elle a son centre sur l'hyperboloïde, à 3 centimètres du plan du cercle de gorge et dans le plan méridien parallèle au plan vertical de projection. On construira la tangente en un point de la courbe d'intersection. *(1862.)*

ACADÉMIE DE CAEN.

Concours de 1874.

1. — Calculer les éléments d'un triangle connaissant la base, la hauteur et le produit des tangentes des demi-angles à la base.

2. — Étant donné un triangle, mener par le sommet une droite telle qu'elle détermine des triangles ayant des cercles inscrits égaux. — Exprimer les diverses parties des triangles en fonction de ce rayon commun.

Concours de 1875.

1. — Trouver dans le plan d'un triangle un point tel qu'en le joignant aux trois sommets du triangle, les trois triangles ainsi formés aient des cercles circonscrits égaux.

2. — Les deux côtés d'un rectangle étant donnés, on demande de les diminuer d'une quantité tellement choisie que la surface diminue d'une quantité donnée. — Discussion.

Concours de 1876.

Étant données la somme des hauteurs de deux cylindres et leurs surfaces latérales, déterminer les rayons des bases de manière que le volume total soit maximum ou minimum.

On donne deux circonférences O et O′ et un point P extérieur, mener deux rayons parallèles OA, O′A′ tels qu'on ait PA = PA′.

ACADÉMIE DE DIJON.

Concours de 1869.

Point d'une circonférence qui reçoit le moins de chaleur de deux sources égales situées aux extrémités d'un même diamètre. *(Enseignement spécial, 3e année.)*

Concours de 1872.

1. — Par un point fixe K, pris sur un diamètre AA′ d'un cercle, on mène deux droites quelconques également inclinées sur ce diamètre ; par les points M et M′ où elles rencontrent respectivement les tangentes en A et A′ on mène à la circonférence deux autres tangentes MT et M′T′. Quel est le lieu de leur point d'intersection? *(Math. élém.)*

2. — Les aiguilles d'une horloge se trouvent, la petite entre les chiffres XI et XII, la grande entre les chiffres XII et I du cadran, et si l'on mettait chacune d'elles à la place de l'autre, elles occuperaient des positions où peut les amener simultanément le mouvement de l'horloge. Quelle heure marquent-elles? *(Enseig. spécial, 3e année.)*

3. — Construire les projections des arêtes d'un trièdre trirectangle connaissant son sommet et sachant que les trois faces sont également inclinées sur le plan horizontal. *(Enseig. spécial, 3e année.)*

Concours de 1874.

1. — Construire un système de deux circonférences situées dans un même plan, connaissant une tangente commune intérieure, une tangente commune extérieure, et l'axe radical de ces circonférences *(Math. élém.)*

2. — Couper un cube par un plan suivant un hexagone équiangle dont deux côtés consécutifs soient dans le rapport de 1 à 2. *(Enseig. spécial, 3e année.)*

Concours de 1876.

1. — Construire un trièdre isoscèle connaissant la face adjacente aux angles égaux et l'angle qui lui est opposé. Construire les angles d'ouverture du cône inscrit et celui du cône circonscrit. *(Math. élém.)*

2. — Construire et calculer un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

(Enseig. spécial, 3e année.)

3. — Construire un segment rectiligne de longueur donnée, parallèle au plan horizontal, et s'appuyant par ses extrémités sur deux droites données.

(Enseig. spécial, 3e année.)

ACADÉMIE DE BORDEAUX.

Concours de 1876.

On donne un rectangle, et hors de son plan une droite parallèle à deux côtés de ce rectangle et dont le milieu se projette sur le centre du rectangle. Par cette droite et les côtés du rectangle qui lui sont parallèles, on mène deux plans; par les extrémités de la droite et les deux autres côtés du rectangle, on mène deux autres plans. On forme ainsi un solide à cinq faces en forme de coin, dont on propose d'étudier complétement les propriétés. — I. Calculer le volume et la surface latérale de ce solide au moyen de sa hauteur, de la longueur de son arête supérieure et des dimensions de sa base. — II. Maximum ou minimum du volume lorsqu'on donne la hauteur, l'arête supérieure et le périmètre de base. — III. Expression de l'aire et du contour d'une section parallèle à la base à une distance donnée de cette base ou de l'arête supérieure. — IV. Calcul des deux parties du volume ou de la surface latérale. — V. Déterminer la distance du plan sécant à la base : 1° de manière que la surface latérale soit partagée dans un rapport donné; 2° de manière que la section soit à la base dans un rapport donné. — VI. Calculer les inclinaisons des arêtes et des faces sur la base. On aura égard à toutes les variations de forme qui peuvent résulter des divers rapports mutuels des dimensions de la figure. — VII. Vérifier à l'aide de ces limites toutes les formules obtenues. — VIII. Indiquer la représentation de la figure, et les principales constructions au moyen de la Géométrie descriptive. — IX. Exemple numérique : $H = 3235$; — arête supérieure $a = 1317$; — dimensions de la base $b = 2413$, $c = 1197$.

MÉLANGES

DU ROLE DE L'EXPÉRIENCE

DANS LES SCIENCES EXACTES

par M. **J. Hoüel**, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux.

(Voir page 118.)

III

Les grandeurs se divisent en grandeurs *discrètes* ou *numériques*, et en grandeurs *concrètes* ou *continues*.

Les grandeurs discrètes se composent d'individus considérés comme identiques par rapport à la propriété d'après laquelle est dénommée l'espèce de l'*unité*, qui est aussi l'espèce de la quantité. La quantité se forme par la *répétition* ou *multiplication* de l'unité. La loi qui préside à cette opération s'appelle un *nombre*. Une quantité discrète est complétement connue quand on donne son espèce et son nombre.

La théorie mathématique des quantités discrètes ne s'occupe que des nombres qui les représentent, indépendamment de leur espèce. Les nombres pouvant être définis et comparés avec une exactitude parfaite, leur théorie se présente immédiatement avec toute sa rigueur, et l'Arithmétique des nombres entiers forme la branche la plus simple des Mathématiques pures.

Nous n'entreprendrons pas ici d'examiner quelle a été la part de l'expérience dans la formation de l'Arithmétique, tant élémentaire que supérieure. Nous remarquerons seulement que, si l'expérience — c'est-à-dire l'examen des résultats obtenus en calculant sur des exemples particuliers — a été souvent un auxiliaire puissant dans la recherche, par induction, des propriétés des nombres les plus cachées, elle joue toutefois, comme base des principes et des démonstrations, un rôle des plus restreints, si même elle y intervient en quoi que ce soit.

Les quantités concrètes se forment par accroissement continu (par addition). Elles sont considérées comme étant de même nature dans toutes leurs parties, relativement aux propriétés qu'exprime leur dénomination.

Celles que nous avons sous les yeux ne sont pas susceptibles d'être définies et comparées avec une complète exactitude, comme l'étaient les quantités discrètes, et cela tient à la fois à l'indécision de leurs limites et à l'imperfection de nos sens et de nos moyens d'observation. On ne peut donc les soumettre directement à une théorie mathématique, et l'on est forcé de remplacer leur étude par celle de grandeurs idéales, définies par les propriétés dont nos moyens de mesure plus ou moins grossiers nous permettent de constater approximativement l'existence dans les objets matériels.

Ainsi l'étude de l'étendue des corps réels, dont la forme ne peut être parfaitement définie ni parfaitement observée, doit être précédée de l'étude abstraite de corps idéaux, de formes rigoureusement déterminées à l'aide de procédés de mesure complétement exacts, et cette dernière étude se ramène elle-même à celle de figures privées d'une ou de deux de leurs dimensions, et finalement à la considération du point privé de toute étendue.

De même, la science du mouvement physique prend pour base, ou, si l'on veut, pour canevas, la Mécanique abstraite, qui aux hypothèses de la Géométrie en ajoute certaines autres, suggérées plus ou moins directement par l'expérience ; elle opère ainsi sur des corps géométriques, aux propriétés desquels elle ajoute l'idée de *masse*, et qui sont soumis à des causes de mouvement appelées *forces*, définies par l'effet qu'elles produisent ou tendent à produire en vertu des lois admises. Aux diverses branches de la Physique des corps réels correspondent des branches spéciales de la Mécanique abstraite, appuyées sur de nouvelles hypothèses, que l'on choisit de manière à pouvoir les traiter par les méthodes mathématiques, et à en déduire des résultats aussi voisins que possible des phénomènes que l'on veut représenter.

Il importe essentiellement, dans ces sciences rationnelles

et abstraites, de distinguer les hypothèses, considérées en elles-mêmes, — lesquelles sont *à priori* essentiellement arbitraires, à la seule condition de n'être pas contradictoires entre elles — de la valeur de ces hypothèses, considérées au point de vue des applications. Toute science abstraite, fondée sur des hypothèses non contradictoires, et développée conformément aux règles de la Logique, est en elle-même *absolument vraie.* Mais elle peut bien n'avoir aucun rapport avec les phénomènes naturels, et se trouver fausse, lorsqu'on l'examine au point de vue de la réalité physique. C'est ce qui arrive quand les hypothèses ont été choisies d'une manière erronée ou incomplète, soit par suite d'une induction fondée sur des observations trop inexactes ou trop restreintes, soit par suite de simplifications illégitimes que l'on aura introduites pour en faciliter l'étude mathématique.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces considérations générales, et nous nous bornerons à en développer les applications à la plus simple des sciences physiques : l'étude des corps sous le rapport de l'étendue, ou la *Géométrie.*

(*A suivre.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 8.

Solution par M. Long, élève à l'Athénée royal de Liége.

Si l'on ajoute termes à termes deux progressions géométriques, qui n'ont pas même raison, les résultats ne forment pas une progression, mais chaque terme pourra se déduire des deux précédents, en les multipliant par des nombres constants et ajoutant les résultats.

Soient deux progressions géométriques :

$$\div\div\ a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ ar^n.$$

$$\div\div\ b : bq : bq^2 : bq^3 : \ldots\ bq^n.$$

En les ajoutant termes à termes, on a

(1) $a + b,\ ar + bq,\ ar^2 + bq^2,\ ar^3 + bq^3 \ldots\ ar^n + bq^n.$

Si ces termes étaient en progression géométrique on devrait avoir : $\frac{a+b}{ar+bq} = \frac{ar+bq}{ar^2+bq^2}$

ou en chassant les dénominateurs

$$(a+b)(ar^2+bq^2) = (ar+bq)^2$$

ou après réductions $ab(q-r) = 0$.

On devrait avoir $q - r = 0$; alors $r = q$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les termes ne forment pas une progression géométrique. Voyons s'ils ne formeraient pas une progression arithmétique :

Pour plus de simplicité supposons a et b positifs. On aurait alors

$$a + b - (ar + bq) = (ar + bq) - (ar^2 + bq^2)$$

ou $$a(1-r)^2 + b(1-q)^2 = 0.$$

Or a et b étant positifs, les facteurs $(1-r)^2$ et $(1-q)^2$ sont essentiellement positifs; donc ces deux termes ne s'annuleront pas et l'hypothèse de laquelle on est parti est fausse. Donc les termes ne sont pas en progression arithmétique.

Soient maintenant K et K′ les coefficients par lesquels il faut multiplier respectivement deux termes de la suite (1), pour qu'en additionnant les produits on trouve le terme suivant. Par hypothèse on aura

$$(a+b)\,K + (ar+bq)\,K' = ar^2 + bq^2.$$
$$(ar+bq)\,K + (ar^2+bq^2)\,K' = ar^3 + bq^3.$$

Ces deux égalités détermineront K et K′. Éliminant K on trouve :

$$K' = \frac{ab\,[r^2(r-q) - q^2(r-q)]}{ab\,(r-q)^2} = r + q,$$

et par suite, après simplifications,

$$K = -rq.$$

Les deux facteurs sont donc $r + q$ et $-rq$.

Comme ils ne dépendent que des raisons des deux progressions, ces facteurs sont constants pour deux mêmes progressions.

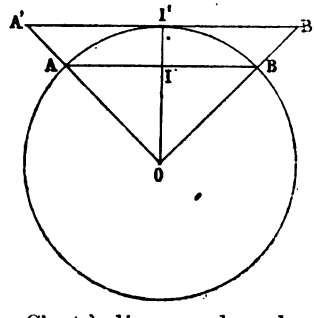
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Canon et Orth, de Liége; Vautré; Richard, élève au collége de Chartres; Biette, élève au lycée du Havre.

QUESTION 17.

Solution par M. Estienne, élève du Lycée de Bar-le-Duc.

A *est l'aire d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, et* B *l'aire du polygone semblable circonscrit;* B — A *est équivalent à l'aire du polygone régulier semblable inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté de* B, *ou bien encore du polygone régulier circonscrit à la circonférence qui a pour diamètre le côté de* A.

Soient AB le côté du polygone A, A'B' le côté du polygone B et O le centre de la circonférence circonscrite au polygone A. OI perpendiculaire à AB et à A'B' coupera ces droites en leurs milieux I et I'. OB et OB' sont respectivement les rayons des circonférences circonscrites aux polygones A et B; OI est le rayon de la circonférence inscrite au polygone A.



Cela posé, on sait que deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme les carrés des rayons des circonférences circonscrites ou inscrites. Or dans le triangle rectangle OI'B' on a

$$\overline{I'B'}^2 = \overline{OB'}^2 - \overline{OI'}^2 \qquad (1)$$

C'est-à-dire que le polygone régulier semblable à A et à B, inscrit dans la circonférence qui aurait pour diamètre le côté de B a une surface égale à A — B.

De même dans le triangle rectangle OIB on a

$$\overline{IB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OI}^2$$

C'est-à-dire que le polygone régulier semblable à A et B circonscrit à la circonférence qui aurait pour diamètre le côté de A a une surface égale à A — B.

Remarque. — En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par π, on voit que la surface comprise entre deux circonférences concentriques OA et OA' est équivalente au

cercle qui à pour diamètre la droite A'B' tangente à la petite circonférence et limitée à la grande.

Solution trigonométrique

par M. Vautré.

Posons $OI' = 1$, $A'OI' = \alpha = \frac{\pi}{n}$

on a $A = n \,.\, OI \,.\, AI = n \cos \alpha \sin \alpha$ (1)

et $B = n \,.\, OI' \,.\, A'I' = n \operatorname{tang} \alpha$ (2)

donc $$B - A = n \left[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha\right]$$

ou $$B - A = n \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha}$$

Si dans (1) on fait $A'I' = r' \operatorname{tg} \alpha$

on a $$r' = \operatorname{tg} \alpha$$

donc $$A' = n \operatorname{tg}^2 \alpha \cos \alpha \sin \alpha$$

ou $$A' = n \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = B - A$$

de même si dans (2) on fait $AI = r''$

on a $$r'' = \sin \alpha$$

alors $$B' = \frac{n \sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = B - A$$

Donc enfin $$A' = B' = B - A;$$

c. q. f. d.

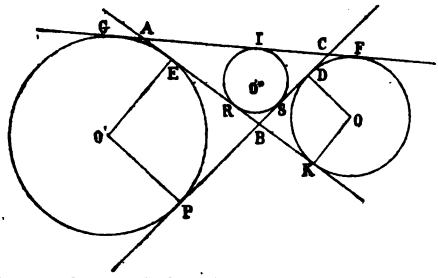
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Canon, de Liége ; Chanier, du lycée de Clermont-Ferrand ; Biette, élève du lycée du Havre ; Neveu, séminaire de Charleville ; Julliaud, à Agen ; Everty, au collége Chaptal ; Moulun, à Lorient.

QUESTION 18.

Solution par M. Canon, élève à l'Athénée royal de Liége.

Deux cercles étant dans un même plan et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est équivalent au rectangle des rayons.

Soient les deux circonférences O et O', les tangentes com-



munes intérieures AK, CP qui se coupent à angle droit en B, la tangente commune extérieure FG et le triangle ABC formé par les trois tangentes, R étant le rayon de O' et r celui de O, je dis que la surface ABC $=$ Rr.

Tout d'abord si l'on joint OD, OK, O'E, O'P, on remarque que DOKB et O'EBP sont des carrés; donc EB $=$ R, BD $= r$, il faut prouver que EB, BD est l'expression de la surface. Or si l'on suppose tracé le cercle O'' inscrit au triangle rectangle ABC, je sais que la surface de ce triangle est égale à AI. IC. [*Problème 2me, page 59.*]

Toute la question revient donc à prouver que

$$EB.\ BD = AI.\ IC.$$

Mais par rapport au triangle ABC, O et O' étant des cercles ex-inscrits, on sait que : *Sur chaque côté d'un triangle quelconque le segment compris entre un sommet et le point de contact du cercle inscrit est égal au segment compris entre l'autre sommet et le point de contact du cercle ex-inscrit;* nous aurons donc EB $=$ AR et BD $=$ SC

alors il faut prouver que

$$AR.\ SC = AI.\ IC$$

Or AI et AR sont égales de même IC et SC

Donc Surf ABC $=$ EB. BD $=$ Rr.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chanier, Perrin, du lycée de Clermont; Demortin, de l'école communale de Doullens; Vautré à Chatel-sur-Moselle; Biette, lycée du Havre; Orth, Long, à Liége; Codet à La Flèche; Cuinet, à Bourg; Vidnau, à Bordeaux; Lorain, à Semur; Julliaud, à Agen.

BIBLIOGRAPHIE

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS AVEC APPLICATION A L'ALGÈBRE, LA TRIGONOMÉTRIE ET LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE, A L'USAGE DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, par G. DOSTOR, *docteur ès sciences, professeur de mécanique rationnelle à la faculté des sciences de l'Université catholique de Paris.* — 1 vol. in-8°, de XXXII-352 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1877. Prix 8 francs.

Cet ouvrage, quoique destiné aux classes de mathématiques spéciales, peut être étudié avec fruit et succès par les élèves de mathématiques élémentaires; la partie théorique est entièrement à leur portée. Ils liront même avec intérêt un grand nombre des applications à l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie.

Ce livre comble une lacune dans l'enseignement français. Les traités de Brioschi et de Baltzer sont d'une lecture assez difficile pour les élèves, celui de M. Dostor est rédigé avec une simplicité très-encourageante pour le lecteur. Quoique élémentaire, il est cependant à peu près complet et il fait connaître toutes les ressources importantes que les mathématiques puisent dans la science des déterminants.

L'ouvrage, avant d'être livré à l'impression, avait reçu l'approbation de plusieurs sommités scientifiques et en particulier de M. Hermite. Ce haut patronage suffit pour le recommander aux professeurs et aux élèves.

J. B.

CORRESPONDANCE

1. — Nous avons reçu trop tard pour pouvoir les signaler dans le numéro de Mars des solutions de la question n° 5 dues à MM. des Grées du Loû, au lycée de Lorient; Gravet, au lycée d'Orléans; Ernst, au lycée de Montauban; Granger, au lycée de Périgueux; Bellamy, au lycée de Saint-Brieuc.

M. Nigri, au lycée de Pau, résout la même question en remarquant que la ligne PM est l'axe radical des deux circonférences. Cette remarque lui permet de généraliser la question en considérant deux circonférences assujetties à passer l'une en A, l'autre en B, et à avoir PM pour axe radical. En continuant la construction indiquée précédemment, les points Q et R sont encore les points de contact de la tangente commune. — Si on suppose que les deux circonférences touchent la circonférence AB, l'une intérieurement, l'autre extérieurement, on obtiendra de la même manière la tangente commune intérieure.

2. — Nous avons aussi reçu trop tard pour pouvoir les signaler dans le numéro d'Avril des solutions de la question N° 26 par MM. Jullidière, de Mont de Marsan; Long, de Liége; Réveillé, de Montpellier; et Biette, du Havre.

3. — M. Vautré, de Châtel-sur-Moselle, déduit de la propriété des sécantes dans le cercle, la démonstration très-simple des relations métriques entre les côtés d'un triangle. — Nous résumerons l'un des cas, celui où l'on prend le côté opposé à un angle obtus, les autres cas se trouvant de même. — L'angle C étant obtus, avec BC comme rayon, décrivons une circonférence;

le point A étant extérieur à ce cercle, on a, si $2p$ représente la partie intérieure de la sécante, AC : $(AB + BC)\ (AB - BC) = AC(AC + 2p)$, ou $AB^2 - BC^2 = AC^2 + 2p \times AC$. Le théorème est donc établi.

4. — M. Julliard, maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand nous envoie la solution suivante d'un théorème bien connu : le lieu géométrique des points tels que la somme des distances de l'un des points à deux sommets d'un triangle équilatéral est égale à la distance du même point au troisième sommet est la circonférence circonscrite. — En effet, en appelant d, d', d'' les trois distances, a le côté du triangle; de l'hypothèse $d + d' = d''$, on déduit facilement $ad + ad' = ad''$. En choisissant convenablement pour a, l'un quelconque des trois côtés, on arrive à la relation fondamentale entre les diagonales et les côtés d'un quadrilatère inscrit. — Donc.....

5. — M. Th. Lambert, professeur de mathématiques au collége de Belle-Vue, à Dinant (Belgique), nous communique une démonstration simple des théorèmes d'Apollonius.

En nommant (xy) $(x'y')$ les coordonnées de deux points conjugués de l'ellipse, α le coefficient d'inclinaison du diamètre qui passe par le premier point, il trouve :

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\alpha^2 + b^2}\ y^2 = \frac{a^2b^2\alpha^2}{a^2\alpha^2 + b^2}\ x'^2 = \frac{a^4\alpha^2}{a^2\alpha^2 + b^2}\ y'^2 = \frac{b^4}{a^2\alpha^2 + b^2}$$

il en résulte :

$x^2 + x'^2 = a^2$, $y^2 + y'^2 = b^2$, par suite en ajoutant membre à membre $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$.

La hauteur du parallélogramme construit sur a' b' est :

$$H^2 = \frac{a^2\alpha^2 + b^2}{1 + \alpha^2}.$$

on en conclut :

$$b'^2\ H^2 = a^2b^2$$

d'où

$$a'b'\ \sin\theta = ab$$

6. — M. Rivier, élève au lycée de Tournon, nous fait remarquer qu'il y a une erreur à la page 81, dans l'énoncé de la question du concours de Douai. Il faut le rectifier comme il suit : *Dans le quadrilatère BCDE, on connaît trois côtés* BD, CD, DE, *l'angle* C *et l'angle* A *formé par les côtés* CD *et* BE *prolongés. Calculer le quatrième côté* DE. *Condition que doit remplir ce quadrilatère pour que tous les rectangles que l'on lui circonscrira soient semblables.*

7. — Nous prions nos correspondants, de nous envoyer les sujets de concours de leur Académie, tant pour l'Enseignement classique que pour l'Enseignement spécial. — Nous serions heureux de pouvoir, pour chaque Académie, signaler la copie couronnée, ou au moins indiquer les points saillants de cette copie.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 6856-7.

DE L'INVOLUTION

par M. **Vazeille**, professeur de mathématiques spéciales à Sainte-Barbe.
(Suite, voir page 132.)

Il est possible de représenter, par les valeurs successives d'un même paramètre λ, *les segments variables d'une même involution.* Pour établir ce fait, rappelons d'abord que la fonction rationnelle

$$\frac{a\lambda + b}{a'\lambda + b'}$$

satisfait aux conditions suivantes : 1° elle varie dans un sens déterminé, toujours le même, quand λ parcourt dans un sens déterminé toute l'échelle des grandeurs depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif; 2° elle passe une fois et une seule fois par toute valeur donnée, positive ou négative.

Cela posé, soit :

$$Guv + H(u + v) + K = 0$$

Si nous prenons :

$$u + v = \frac{m\lambda + m'}{p\lambda + p'}$$

il en résultera pour uv une expression :

$$uv = \frac{n\lambda + n'}{p\lambda + p'}$$

et par suite les valeurs associées, u, v, seront les racines de l'équation :

$$(p\lambda + p')x^2 - (m\lambda + m')x + (n\lambda + n') = 0$$

ou bien :

$$p'x^2 - m'x + n' + \lambda(px^2 - mx + n) = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Voici d'ailleurs la démonstration de la proposition inverse :

Soit : $ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0$

une équation du second degré renfermant un seul paramètre variable λ; si nous désignons par u et v les deux racines de cette équation, nous aurons les deux relations :

$$\begin{cases} u + v = -\dfrac{b + b'\lambda}{a + a'\lambda} \\ uv = \dfrac{c + c'\lambda}{a + a'\lambda} \end{cases}$$

et si on élimine λ entre ces deux relations, on trouve la relation suivante :

$$(ab' - ba')uv + (ac' - ca')(u + v) + bc' - cb' = 0$$

or, c'est évidemment une relation d'involution.

Nous avons donc, dès ce moment, deux manières distinctes et également générales de représenter une involution, ou par la relation

$$(1) \qquad Guv + H(u + v) + K = 0,$$

ou par l'équation :

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0.$$

Il est utile de remarquer que, si les équations (1) et (2) représentent la même involution, on a entre leurs coefficients les relations :

$$\frac{ab' - ba'}{G} = \frac{ac' - ca'}{H} = \frac{bc' - cb'}{K}$$

Actuellement, il est possible de montrer l'utilité, au point de vue algébrique, de cette notion d'involution pour éclairer et simplifier l'étude de la fonction rationnelle :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

Si, en effet, nous désignons par $-\lambda$ la valeur de cette fonction variable avec x, on voit immédiatement que chaque valeur de λ détermine un segment de l'involution représentée par l'équation (2); dès lors se présentent naturellement les questions suivantes :

1° *Reconnaître l'espèce de l'involution :* L'involution sera de première espèce si elle a des points doubles réels, c'est-à-dire s'il existe des valeurs réelles de λ qui donnent à l'équation :

$$(a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')x + (c + \lambda c') = 0$$

deux racines égales; c'est-à-dire, encore, si l'équation en λ

$$(3) \qquad (b + \lambda b')^2 - 4(a + \lambda a')(c + \lambda c') = 0$$

a deux racines réelles. Or cette équation (3) peut s'écrire :

(3) $(b'^2 - 4a'c')\lambda^2 + 2(bb' - 2ca' - 2ac')\lambda + (b^2 - 4ac) = 0$

donc enfin :

L'involution de *première espèce* est caractérisée par l'inégalité :

(4) $(bb' - 2ca' - 2ac')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') > 0$

L'involution de *seconde espèce* est caractérisée par l'inégalité contraire :

(5) $(bb' - 2ca' - 2ac')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') < 0$

Quand il y a involution de première espèce, il y a deux valeurs de λ qui vérifient l'équation (3) et qui sont réelles; si nous les désignons par λ_1 et λ_2, chacune d'elles réduit le segment involutif à zéro; en d'autres termes, $-\lambda_1$ est une valeur que la fraction rationnelle

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

prend deux fois, mais pour deux valeurs égales d'x; il en est de même de : $-\lambda_2$; tandis que toute autre valeur attribuée à la fraction proviendra toujours de deux valeurs distinctes, réelles ou imaginaires, de la variable x; en d'autres termes : *l'involution de première espèce est correspondante à une fraction rationnelle qui a un maximum et un minimum.*

Quand il y a une involution de seconde espèce, il n'y a aucune valeur réelle de λ qui vérifie l'équation (3); par conséquent, toute valeur réelle attribuée à λ proviendra de deux valeurs d'x toujours distinctes; en d'autres termes : *l'involution de seconde espèce est associée à une fraction rationnelle qui n'a ni maximum ni minimum.*

Afin de préciser ces conclusions et le sens qu'on doit leur attribuer, prenons :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$
$$a'x^2 + b'x + c' = a'(x - \alpha')(x - \beta')$$

alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \\ \alpha' + \beta' = -\dfrac{b'}{a'}, \quad \alpha'\beta' = \dfrac{c'}{a'} \end{cases}$$

par suite, si nous représentons par R le premier membre de l'inégalité (4), il viendra :

$$R = a^2a'^2\,[(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') - 2\alpha\beta - 2\alpha'\beta']^2 - a^2a'^2\,(\alpha - \beta)^2 \times (\alpha' - \beta')^2$$

ou bien :

$$R = 4a^2a'^2\,[\alpha\alpha' + \beta\beta' - \alpha\beta - \alpha'\beta']\,[\alpha\beta' + \beta'\alpha - \alpha\beta - \alpha'\beta']$$

ou bien :

$$(6) \qquad R = 4a^2a'^2 \,.\, (\alpha - \alpha')(\alpha - \beta') \,.\, (\beta - \alpha')(\beta - \beta')$$

Cela fait, si nous supposons que α et β soient des grandeurs réelles, ainsi que α' et β', c'est-à-dire si les deux segments involutifs qui correspondent à $\lambda = 0$ et à $\lambda = \infty$ sont réels, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Si les deux segments involutifs, ci-dessus désignés, sont extérieurs l'un à l'autre, ou engagés l'un dans l'autre, la fonction R est positive, l'involution est de première espèce et a deux points doubles réels et distincts.

Si les deux segments involutifs, déjà désignés, empiètent l'un sur l'autre, l'involution est de seconde espèce, et n'a pas de points doubles réels.

En d'autres termes :

1° Si la fraction rationnelle

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

a deux *zéros* et deux *infinis* réels, et si dans l'ordre des grandeurs croissantes les *zéros* et les *infinis* ne sont pas alternés. la fonction sera croissante dans certains intervalles, décroissante dans d'autres; elle aura un maximum et un minimum, cela correspond aux diverses hypothèses qui suivent :

$$\begin{array}{lllllll}
-\infty \ldots\ldots & \alpha \ldots\ldots & \beta \ldots\ldots & \alpha' \ldots\ldots & \beta' \ldots\ldots & +\infty \\
-\infty & \alpha & \alpha' & \beta' & \beta & +\infty \\
-\infty \ldots\ldots & \alpha' \ldots\ldots & \beta' \ldots\ldots & \alpha \ldots\ldots & \beta \ldots\ldots & +\infty \\
-\infty & \alpha' & \alpha & \beta & \beta' & +\infty
\end{array}$$

2° Si la fonction rationnelle a deux *zéros* et deux *infinis* réels, et si les valeurs de ces *zéros* et de ces *infinis* se présentent alternativement dans l'ordre des grandeurs croissantes, la fonction n'aura qu'un seul sens de variation, sera toujours croissante ou toujours décroissante, avec deux dis-

continuités instantanées pour chacun de ses passages par l'infini.

Mais qu'arrive-t-il si l'une ou l'autre des inégalités (4) ou (5) se transforme en une égalité ou relation? Dans ce cas, en nous plaçant au point de vue de l'involution, nous dirons que l'involution a deux points doubles superposés; mais nous voyons d'après la forme (6) que dans cette hypothèse l'un des *zéros* coïncide avec l'un des *infinis*, ou que les deux segments qui servent à fixer l'involution ont une extrémité commune; alors on voit sans peine, d'après la construction générale, que cette extrémité commune est à la fois et *centre* et *point double* de l'involution.

Nous tenons surtout à faire remarquer que la condition :

$$(bb' - 2ca' - 2ac')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations :

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

aient une racine commune; et nous la recommandons expressément à l'attention des lecteurs.

Cela dit, passons aux applications purement géométriques.

(A suivre.)

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE COMBINATOIRE

par M. Désiré André.

1. On suppose formés tous les arrangements p à p, avec répétition, de trois lettres distinctes, et l'on demande le nombre de ceux d'entre eux qui commencent par une même lettre et renferment chacun les trois lettres distinctes considérées.

2. Soient a, b, c ces trois lettres, x_p le nombre cherché, $z_{3,p}$ le nombre des arrangements renfermant chacun les trois lettres distinctes et $Z_{3,p}$ le nombre total des arrangements formés.

3. Évidemment, il y a autant d'arrangements commençant par a que par b ou c. Donc

$$x_p = \frac{1}{3} z_{3,p},$$

et nous sommes ramenés au calcul de $z_{3,p}$.

4. Pour obtenir $z_{3,p}$, considérons tous les arrangements formés et classons-les. Ils sont de trois espèces, les uns renfermant chacun les trois lettres données, les autres n'en renfermant que deux, et les derniers qu'une seule. Le nombre des premiers est évidemment $z_{3,p}$; ceux des seconds qui contiennent b et c sont au nombre de $z_{2,p}$, de même pour ceux qui contiennent c et a et pour ceux qui contiennent a et b, de façon que le nombre total des seconds est $3z_{2,p}$; enfin, il y a trois arrangements renfermant chacun une seule lettre. Nous pouvons donc écrire

$$z_{3,p} + 3z_{2,p} + 3 = Z_{3,p}.$$

Une analyse semblable des arrangements avec répétition de deux lettres p à p nous conduirait à l'équation

$$z_{2,p} + 2 = Z_{2,p}.$$

L'élimination de $z_{2,p}$ entre ces deux équations nous donne

$$z_{3,p} = Z_{3,p} - 3Z_{2,p} + 3,$$

et nous sommes ramenés à la détermination des nombres $Z_{3,p}$ et $Z_{2,p}$.

5. Il est clair que $Z_{3,1}$ est égal à 3. A la suite de chaque lettre constituant un arrangement de trois lettres 1 à 1, nous pouvons, puisque les répétitions sont permises, écrire chacune des trois lettres données : donc $Z_{3,2} = 3^2$. De même, $Z_{3,3} = 3^3$, $Z_{3,4} = 3^4$,..... En général, $Z_{3,p} = 3^p$. Pareillement, $Z_{2,p} = 2^p$.

6. Portons ces valeurs de $Z_{3,p}$ et de $Z_{2,p}$ dans l'expression précédente de $Z_{3,p}$, nous trouvons

$$z_{3,p} = 3^p - 3 \,.\, 2^p + 3;$$

et il s'ensuit immédiatement

$$x_p = 3^{p-1} - 2^p + 1.$$

Telle est la solution de notre problème.

N.-B. — L'auteur du présent article a résolu en détail tous les problèmes généraux dont le précédent n'est qu'un cas particulier dans un mémoire assez court inséré au Bulletin de la Société mathématique de France, vol. de 1877.

PROPRIÉTÉS NOUVELLES
DES
POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

par **Georges Dostor.** (*Suite*, voir page 134.)

---

8. *Relations entre les rayons* R, *r et* ρ *des trois sphères.* Faisons le produit des deux égalités (II) et (I), nous obtiendrons la relation remarquable

$$\text{(IV)} \qquad Rr \sin \frac{2\pi}{n} = \rho^2 \sin \frac{2\pi}{m}$$

9. L'application de cette formule aux cinq polyèdres réguliers convexes donne

Tétraèdre : $Rr \sin 120^\circ = \rho^2 \sin 120^\circ$, $Rr = \rho^2$.

Hexaèdre : $Rr \sin 90^\circ = \rho^2 \sin 120^\circ$, $2Rr = \rho^2 \sqrt{3}$.

Octaèdre : $Rr \sin 120^\circ = \rho^2 \sin 90^\circ$, $Rr\sqrt{3} = 2\rho^2$.

Dodécaèdre : $Rr \sin 72^\circ = \rho^2 \sin 120^\circ$, $Rr\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2\rho^2\sqrt{3}$.

Icosaèdre : $Rr \sin 120^\circ = \rho^2 \sin 72^\circ$, $2Rr\sqrt{3} = \rho^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Nous voyons par ces valeurs que :

1° Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite;

2° Dans l'hexaèdre et octaèdre réguliers, qui sont inscrits dans la même sphère, les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont entre eux dans le rapport de 2 *à* $\sqrt{3}$; *et le produit de ces deux rayons est égal au produit des rayons des sphères l'une inscrite et l'autre circonscrite aux mêmes polyèdres.*

3° Dans le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers, qui sont inscrits dans la même sphère, les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont entre eux dans le rapport de $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ *à*

$2\sqrt{3}$; *et le produit de ces deux rayons est égal au produit des rayons des deux sphères l'une inscrite et l'autre circonscrite aux mêmes polyèdres.*

10. *Relations particulières entre les rayons* R, *r et* ρ *des trois sphères.* Les valeurs trouvées pour ces rayons aux numéros 3, 5 et 7 permettent de vérifier les égalités suivantes :

Hexaèdre : $R^2 = \rho^2 + r^2$.

Octaèdre : $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\rho^2}$.

Dodécaèdre : $R^2 = 12\rho^2 - 15r^2$.

Icosaèdre : $R^2 = 4\rho^2 - 3r^2$.

11. *Inclinaison de deux faces adjacentes du polyèdre.* Nous désignerons cette inclinaison par 2α : elle est double de l'angle OIC. Le triangle rectangle OCI nous donne

$$OC = OI \sin OIC.$$

ou (1) $$r = \rho \sin \alpha :$$

mais par la relation (I) nous avons

$$r = \rho \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

dont il vient la valeur connue

$$\text{(V)} \qquad \sin \alpha = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

12. Les inclinaisons mutuelles des faces, dans les cinq polyèdres réguliers convexes sont ainsi :

Tétraèdre : $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{cosec}\ \alpha = \sqrt{3}$, $2\alpha = 70^\circ\, 31'\, 43'',6$.

Hexaèdre : $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{cosec}\ \alpha = \sqrt{2}$, $2\alpha = 90^\circ$.

Octaèdre : $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sec \alpha = \sqrt{3}$, $2\alpha = 109^\circ 28'\, 16'',4$.

Dodécaèdre : $\sin \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$, $\cot \alpha = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$,

$$2\alpha = 116^\circ\ 33'\ 54'',2.$$

Icosaèdre : $\sin \alpha^2 = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}}$, $\operatorname{tang} \alpha = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$,

$$2\alpha = 138^\circ\ 11'\ 22'',75.$$

13. *Expression des rayons R et ρ, des trois sphères en valeurs de l'arête* a *et de l'inclination mutuelle* 2α *des faces adjacentes.* Le triangle rectangle OCI nous fournit la valeur

$$r = \mathrm{OC} = \mathrm{CI} \operatorname{tang} \mathrm{OIC} = \mathrm{CI} \operatorname{tang} \alpha,$$

et, comme on a par le triangle rectangle ACI,

$$\mathrm{CI} = \mathrm{AI} \cot \mathrm{ACI} = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{n},$$

il nous vient

(VI) $$2r = a \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \alpha.$$

Multiplions cette égalité membre à membre par (III), nous aurons

(VII) $$2\mathrm{R} = a \operatorname{tang} \frac{\pi}{m} \operatorname{tang} \alpha.$$

Enfin, dans ces deux expressions remplaçons r et R par leurs valeurs que fournissent (I) et (II), nous obtiendrons

(VIII) $$2\rho = a \frac{\cot \frac{\pi}{n}}{\cos \alpha} = a \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{m}} \operatorname{tang} \alpha.$$

14. Ces expressions nous permettent de calculer les valeurs des rayons des trois sphères; elles sont :

Tétraèdre : $r = \dfrac{1}{12} a \sqrt{6}$, $\rho = \dfrac{1}{4} a \sqrt{2}$, $\mathrm{R} = \dfrac{1}{4} a \sqrt{6}$.

Hexaèdre : $r = \dfrac{1}{2} a$, $\rho = \dfrac{1}{2} a \sqrt{2}$, $\mathrm{R} = \dfrac{1}{2} a \sqrt{3}$.

Octaèdre : $r = \dfrac{1}{6} a \sqrt{6}$, $\rho = \dfrac{1}{2} a$, $\mathrm{R} = \dfrac{1}{2} a \sqrt{2}$.

Dodécaèdre : $r = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$, $\rho = \frac{1}{8} a (\sqrt{5} + 1)^2$,

$$R = \frac{1}{4} a \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1).$$

Icosaèdre : $r = \frac{1}{24} a \sqrt{3} (\sqrt{5} + 1)^2$, $\rho = \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1)$,

$$R = \frac{1}{4} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

NOTE DE GEOMÉTRIE

Par M. **Laudi**, professeur de mathématiques à la Realschule de Trieste (Autriche).

M. Catalan, dans son Recueil de théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire, donne la solution du problème suivant : *Inscrire dans un triangle acutangle* ABC *le triangle* MNP *de périmètre minimum.*

La solution donnée est assez élégante, mais on peut en déduire directement une autre du théorème suivant : *Le triangle* MNP *de périmètre minimum inscrit dans un triangle est celui qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle* ABC.

En effet, si je prends les symétriques M′ et M″ du point M, arbitrairement choisi sur le côté BC, par rapport aux deux autres côtés, et si je mène les lignes M′N, PM″, le périmètre du triangle sera toujours égal à M′NPM″, et si cette ligne est minima, le périmètre sera minimum. Donc déjà les quatre points M′, N, P, M″ sont en ligne droite.

Joignons le point A aux points M′ et M″. D'après la manière dont ces derniers points ont été construits, on a AM′ = AM″ = AM, et enfin M′AM″ = 2A. Donc le triangle isoscèle M′AM″ est constamment semblable à lui-même, et on en déduit que pour que M′M″, et par suite le périmètre soit un minimum, il faut que AM′, et par conséquent AM, soit un minimum; ce qui montre que le point M est le

pied de la hauteur abaissée du point A sur le côté opposé. En répétant le même raisonnement pour les deux autres côtés, on en déduit le théorème proposé.

NOTE. — Cette démonstration fort intéressante donne immédiatement une valeur simple de ce périmètre minimum. Il est facile d'en déduire que h, représentant la hauteur abaissée du point A, le périmètre est $2h \sin A$.

A. M.

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Algèbre.

1. Faire disparaître les radicaux dans

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0.$$

2. Trouver le minimum de l'expression

$$(z - u - 1)^2 + (z - 2u + 8)^2 + (u - 1)^2.$$

3. Minimum de $mx^2 + 2px + q$.

4. Décomposer l'expression

$$(ax + b)^3 + (a'x + b')^3$$

en facteurs du premier degré.

5. On donne quatre points A, B, A', B' sur une droite. On suppose que ces points sont deux à deux fournis par les deux équations $ax^2 + bx + c = 0$; $a'x^2 + b'x + c' = 0$. Quelle relation doit exister entre les coefficients pour que les racines satisfassent à la condition

$$\frac{2}{AA'} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B}?$$

6. Minimum de $\dfrac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$.

7. Minimum de $(ax + b)^2 + (a'x + b')^2$.

8. Maximum de l'expression $-3x^2 + 2x - 1$.

9. Comment varie $(3x + y)^2 + (x - y - 1)^2$, quand on donne à x et y toutes les valeurs possibles?

10. Discuter $\dfrac{(ax + b)^2}{a'x + b}$.

11. On porte sur une droite les longueurs OA, OA' représentant les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et les longueurs OB, OB' représentant les racines de $a'x^2 + b'x + c' = 0$. Quelle relation doit exister entre les coefficients de ces équations pour que l'on ait

$$AI^2 = IB \,.\, IB',$$

I étant le milieu de AA'?

12. Transformer l'expression

$$(ax^2 + bx + c)^2 + (a'x^2 + \ 'x + c')^2$$

en un produit de deux facteurs du second degré.

13. Résoudre $\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x^2} = 7\sqrt{x-6} + \sqrt{x}$

14. Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$$

soit un carré parfait.

15. Si deux quantités réelles a et b sont assujetties à la relation

$$\left(\frac{1 + ab}{a + b}\right)^2 < 1,$$

l'une est supérieure et l'autre inférieure à l'unité.

16. Résoudre

$$ay - bz = c;\ ax + cz = b;\ bx - cy = a.$$

17. Étudier la variation de l'expression

$$\frac{(ax + b)^2 + (a'x + b')^2}{(\alpha x + \beta)^2}.$$

18. Trouver le minimum de l'expression

$$(x - y + 1)^2 + (2x + y)^2 + (x + y + 2)^2.$$

19. Résoudre $\sqrt[n]{\frac{a + x}{a}} + \sqrt[n]{\frac{a + x}{x}} = \sqrt[n]{\frac{x}{b}}.$

20. Soit deux fractions algébriques $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$. Soit n le degré de chacun des quotients de A par B, et de C par D. Posons

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{M}{N};\ \frac{A}{B} = q;\ \frac{C}{D} = q';\ \frac{M}{N} = Q.$$

Démontrer que l'on a $Q = q + q'$.

21. On donne le périmètre d'un triangle rectangle. Déterminer les côtés, de sorte que la surface soit maxima.

22. Montrer qu'on peut donner à x des valeurs assez grandes pour qui la différence entre les fractions

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots}{a'x^m + b'x^{m-1} + c'x^{m-2} + \ldots} \text{ et } \frac{a}{a'}$$

devienne plus petite que toute quantité donnée.

23. L'expression

$$(2x + 3y - 1)^2 + (x - y + 1)^2 + (x + y)^2$$

peut-elle s'annuler? Calculer son minimum sans employer la dérivée.

24. Chercher à inscrire un carré dans un triangle. Il y en a trois. Quel est le plus grand des trois?

25. Résoudre le système des équations

$$\frac{xyz}{x + y} = c;\ \frac{xyz}{y + z} = a;\ \frac{xyz}{z + x} = b.$$

26. On donne un cercle et deux tangentes parallèles MK, NH; on mène une troisième tangente quelconque KH, et on pose MK $= a$. On demande le volume engendré par le quadrilatère MKHN tournant autour de MN. Quelle est la valeur de a pour laquelle le volume sera minimum?

Géométrie.

1. Par un point donné, mener un cercle tangent à deux cercles donnés.

2. Etant donné un triangle dont les côtés sont a, b, c, peut-on toujours en trouver un ayant pour côtés a^2, b^2, c^2, ou bien un triangle ayant pour côtés $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$?

3. On a un triangle BCD inscrit dans un cercle. On mène une tangente au cercle par l'un des sommets B; d'un point A, on abaisse les perpendiculaires AL, AH, AK sur les côtés CD, CB, BD, et AP sur la tangente. Démontrer la relation $AH \times AK = AL \times AP$.

4. On donne un cercle et un point extérieur. Mener par ce point une sécante telle que la partie interceptée soit dans un rapport donné avec le rayon.

5. Par un point intérieur à un cercle on mène une sécante AC sur laquelle on prend une longueur AC′ telle que

$$AC \times AC' = K^2$$

Trouver le lieu du point C′.

6. Soit une circonférence O, une corde AB et une tangente parallèle PQ. Des points A et B, on abaisse des perpendiculaires AP, BQ sur la tangente. Comparer le rectangle ABPQ au segment AMB.

7. Étant donnés deux points sur une sphère, on demande le lieu des milieux des arcs de petits cercles qui passent par ces deux points.

8. Le triangle ABC est tel que les côtés BC et AC doivent passer par deux points fixes; le sommet C doit s'appuyer sur une droite fixe xy; quelle condition le triangle doit-il remplir pour que son troisième côté passe aussi par un point fixe?

9. Démontrer que dans un tétraèdre, si l'on joint un sommet quelconque au point de rencontre des médianes de la face opposée, les quatre lignes ainsi construites se coupent en un même point.

10. On donne une droite et un cercle; par un point C, on mène une tangente CT au cercle, et du point C, on abaisse une perpendiculaire CD sur la droite donnée AB. On demande le lieu des points C tels que

$$\frac{CT^2}{CD} = K.$$

Si ce lieu est une circonférence, déterminer l'axe radical des deux cercles.

11. Étant données quatre tangentes à une parabole, trouver le foyer.

12. On donne deux circonférences O et O′; on mène une tangente à la circonférence O′, qui rencontre la circonférence O aux points A et B. En A et B, on mène les tangentes AM, BM. Trouver le lieu du point de rencontre M.

Trigonométrie.

1. On a l'équation

$$\sin(x + a) = -\cos x.$$

Peut-on en tirer une relation entre x et a?

2. On donne une droite et deux points A et B du même côté de cette droite. On demande de trouver sur la droite un point M tel que l'angle AMB soit maximum.

3. On donne trois points A, B, C en ligne droite. On connaît leurs distances AB = a, BC = b. D'un point M, extérieur, on doit voir AB sous un angle α; sur MB, il y a un point N d'où l'on voit BC sous un angle β; et de plus on a MN = m.

Trouver les points M et N.

4. Calculer la valeur de la fonction

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1$$

A, B, C étant les angles d'un triangle.

5. Trouver l'expression de tg $5a$ en fonction de tg a. En déduire l'expression de tg $\frac{a}{5}$.

6. Résoudre $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

7. Sachant que A + B + C = 180°, vérifier la relation

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

8. Dans un triangle ABC, on mène les perpendiculaires BE, CD. Calculer la ligne DE.

Divers.

1. p étant un nombre premier, trouver un nombre entier x tel que $p + x^2$ soit un carré entier.

2. Un nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, on demande de décomposer ce nombre en une différence de deux carrés.

3. Un nombre étant décomposé en facteurs premiers, trouver le nombre de ses diviseurs; trouver la somme des carrés des diviseurs. Trouver l'excès du nombre des diviseurs de la forme $4n + 1$ sur celui des diviseurs de la forme $4n - 1$.

4. Mener une droite qui divise la surface d'un triangle en moyenne et extrême raison, et qui soit parallèle à une droite donnée.

5. On donne une droite et deux points situés de part et d'autre de cette droite. Faire passer par les deux points un cercle tel que le segment intercepté soit minimum.

6. Inscrire dans un cercle un quadrilatère convexe d'aire maximum.

QUESTIONS

POSÉES DANS L'EXAMEN ORAL DU CONCOURS DE SAINT-CYR.

(Suite. — Voir page 138.)

Vraies valeurs.

$$x = \frac{\sin 2a - \sin 2b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$$

devient $\frac{0}{0}$ pour $a = b$; on demande la vraie valeur?

2. — Trouver la valeur de l'expression

$$x = \frac{\cos 2a}{\cos a - \cos 45^\circ}$$

pour $a = 45^\circ$.

3. — Trouver la valeur de l'angle x lorsque l'on fait $a = b$ dans la formule

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\cos a - \cos b}$$

Triangles.

1. — On connaît les angles A, B, C du triangle ABC; on joint le sommet A au point D situé au tiers de BC à partir de C. On demande de calculer l'angle CAD.

2. — Soient r, r', r'', r''' les rayons des cercles inscrits et exinscrits à un triangle rectangle ABC. Vérifier qu'on a

$$rr'' = r'r'' = \text{surface du triangle.}$$

3. — Résoudre un triangle connaissant les angles et la surface.

4. — On donne les trois côtés a, b, c d'un triangle; si on propose de résoudre le triangle qui a pour côtés ma, mb, mc, les angles seront ceux du triangle (a, b, c); — le faire voir par la trigonométrie.

5. — Étant dônnés un côté et les angles d'un triangle. Calculer le rayon du cercle inscrit O et celui du cercle circonscrit O'

Relation qui existe entre ces deux rayons.

6. — Étant donné un triangle rectangle et sachant qu'on a

$$a^2 = b^2 + c^2$$

trouver la relation des cubes des côtés par rapport à celui de l'hypoténuse.

7. — Résoudre un triangle connaissant les angles et une hauteur.

Résoudre un triangle connaissant le côté a, la somme $b + c$ des autres côtés et l'angle B.

8. — Résoudre un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé A; sachant que $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$.

9. — Étant donné un triangle rectangle dont on connaît l'hypoténuse et les angles, on joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse et on demande les rayons des cercles inscrits dans le triangle primitif et les triangles formés à l'aide de la médiane.

Calculs par logarithmes.

1. — On a $\sin x = \frac{2}{3}$, calculer $\cos x$ à 1 millième près.

2. — On a $\operatorname{tang} a = 0{,}457$. Calculer $\sin a$.

Sur quelle approximation pourra-t-on compter si le dénominateur de la fraction $\frac{0{,}457}{1{,}099}$ est connu à 1 millième près.

3. — On a : $\operatorname{tg} x = \sin 8^\circ + \sin 10^\circ + \sin 12^\circ$; rendre cette expression calculable par logarithmes.

4. — On a : $\sin x = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ$

On demande si cette équation est possible?

5. — On a trouvé :

$$\text{tang } x = \cos A + \cos B + \cos C.$$

Transformer cette somme en un produit sachant que $A + B + C = 180°$.

6. — On a trouvé : $\cos x = 3 - \sqrt{12}$.

Calculer x par logarithmes.

7. — Calculer : $\sin x = \sin a + \cos b$.

8. — On a trouvé : $\text{tang } x = 2 \pm \sqrt{5}$.

Calculer par logarithmes les angles correspondants, sans sortir des deux premiers quadrans.

9. — Rendre la formule :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

calculable par logarithmes.

10. — Rendre calculable par logarithmes :

$$a = h\,(\text{cotg } B + \text{cotg } C).$$

11. — Rendre calculables par logarithmes :

$$1°\ 1 + \text{tg } \varphi;\quad 2°\ \sin \varphi + \cos \varphi.$$

12. — On suppose qu'on ait trouvé :

$$\text{tang } x = 1 + \sqrt{2},$$

comment faire pour calculer x à l'aide des tables?

Problèmes divers.

1. — Calculer sin 1° sans tables de logarithmes avec une approximation donnée.

2. — Trouver la différence entre le sinus de 30° et l'arc de 30° sachant que $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

3. — On décrit un demi-cercle sur un diamètre donné. Par O, milieu de AC, on mène une droite faisant avec AB un angle donné α. Trouver le rayon du cercle inscrit dans le triangle curviligne COB et celui du cercle tangent à l'arc CB extérieurement.

4.— Étant donnés un cercle et une corde DC égale et parallèle au rayon, on prend sur le rayon OA un point P au tiers de ce rayon et l'on joint ce point aux points C et D. On demande de calculer l'angle formé au point P.

5. — On décrit un demi-cercle sur un diamètre AB. D'un point P pris sur AB à une distance d du point O on élève une perpendiculaire à AB. Par A on trace une droite ANM.

Calculer l'angle MAB de façon à ce que la distance NM soit égale au rayon du cercle. Même question pour le cas ou $MN = l$, l étant une longueur différente de celle du rayon.

6. — Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle dont on connaît la base et les deux angles adjacents.

7. — Étant donné un secteur circulaire OAB dont le côté OB est horizontal. Trouver sur l'arc AB un point M, tel qu'en menant par ce point une parallèle à OB et en abaissant des points d'intersection E et M de cette parallèle des perpendiculaires sur OA, la figure EME'M' soit un carré.

8. — Étant donné un rectangle ABCD, trouver sur la base AB un point P tel que de P on voie les côtés AD et DC sous le même angle. Discussion.

9. — On a deux droites parallèles et une perpendiculaire commune à

ces deux droites. Sur la perpendiculaire AB on a un point P tel que PA = aPB = b. Trouver la position d'une droite MN telle que l'angle MPN soit égal à 45°.

10. — On donne un secteur AOB, on demande de trouver sur l'arc AB un point D tel que si l'on mène par D des parallèles aux rayons OA, OB, on forme un parallélogramme de périmètre donné. Discussion.

11. — Soit un cercle C, un diamètre prolongé AB, sur ce diamètre le point P hors du cercle, on mène la droite PEF faisant un angle α avec le diamètre. Calculer la longueur PE.

12. — On donne un demi-cercle décrit sur un diamètre AB, on mène le rayon OC perpendiculaire à AB, par A, on trace une droite AM. Calculer l'angle MAB de façon à ce que NO = AM.

13. — On décrit un demi-cercle sur un diamètre donné AB. On mène le rayon OC perpendiculaire à AB, et par A, on trace une droite ADE qui coupe le cercle en E et le rayon OC en D. Trouver l'angle EAB de façon que le rapport $\frac{DE}{DC} = K$, K étant un nombre donné. Cas particulier, faire $K = \sqrt{2}$.

14. — Étant données deux circonférences sécantes, on demande de mener par un des points d'intersection, une sécante telle que le produit de ses deux parties soit égal à une surface donnée; prendre des angles pour inconnues.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1877

Composition Mathématique (3 heures).

1re Question. — Calcul Logarithmique.

Dans le triangle ABC, on donne

$$A = 128^\circ\, 47'\, 35''$$
$$AB = 8344^m,27$$
$$AC = 5862^m,35$$

On demande de calculer les angles B et C et la hauteur abaissée du sommet A sur le côté BC.

Solution : B = 20° 49′ 5″; C = 30° 23′ 20″; H = 2965,57.

2e Question.

Résoudre l'équation

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$$

dans laquelle les quantités données a et b sont supposées réelles et positives. — Donner la condition de réalité des

racines, et, en la supposant remplie, examiner si les racines satisfont toutes à l'équation.

3e Question.

On donne un demi-cercle construit sur AB comme diamètre, et on mène la tangente BT au point B. Cela posé, on demande de mener par le point A la sécante AMN (M et N étant les points où elle coupe la demi-circonférence et la tangente BT) telle que si on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par la portion de cercle AMB soit équivalent au volume engendré par la surface MNB qui est limitée par les droites MN, NB et l'arc de cercle MB.

Solution de la seconde question.

En faisant passer x dans le second nombre, on a, en élevant au carré, l'équation : $2x^2 - 2bx + b^2 - a^2 = 0$.

Elle donne pour racines

$$x = \frac{b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$$

La condition pour que x soit réel est que l'on ait $2a^2 > b^2$.

Remarquons ensuite que $\sqrt{a^2 - x^2} = b - x$ doit être positif, puisque le radical est pris avec le signe $+$ seulement. Donc une racine trouvée quelconque sera admissible si elle remplit cette condition, puisque nous sommes certains déjà que les valeurs absolues de $\sqrt{a^2 - x^2}$, et de $b - x$ sont égales, leurs carrés étant égaux.

Or on trouve :

$$b - x' = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \; ; \; b - x'' = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$$

donc x'' est toujours admissible et x' l'est quand $b < a$.

Solution de la troisième question.

En prenant pour inconnue la projection de AM sur le diamètre AB, on obtient facilement l'équation

$$x^3 + 2Rx^2 - 4R^2x = 0$$

qui a une racine nulle.

En prenant pour inconnue l'angle BAM, on trouve l'équation trigonométrique

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi$$

qui donne d'abord $\sin^2 \varphi = 0$, puis une équation bi-carrée en $\cos \varphi$. On en tire facilement la valeur de $\cos^2 \varphi$.

L'équation en x débarrassée de la solution singulière $x = 0$ se met sous la forme $x^2 = 2R\,(2R - x)$, ce qui montre que x est la plus grande partie du diamètre divisé en moyenne et extrême raison.

A. M. — —

Épure. (Deux heures et demie.)

On donne un point S dans l'espace, situé à 45 millimètres au-dessus du plan horizontal et à 60 millimètres en avant du plan vertical de projection. Ce point est le sommet de deux cônes droits à base circulaire. Le premier de ces deux cônes repose par sa base sur le plan horizontal de projection, son axe est en conséquence vertical ; le second cône a son axe perpendiculaire au plan vertical de projection contre lequel il s'appuie par sa base. Le rayon de base de chacun de ces deux cônes est de 36 millimètres.—On donne aussi un point O, situé sur l'axe du second cône entre la base et le sommet S et à 17 millimètres de ce sommet.

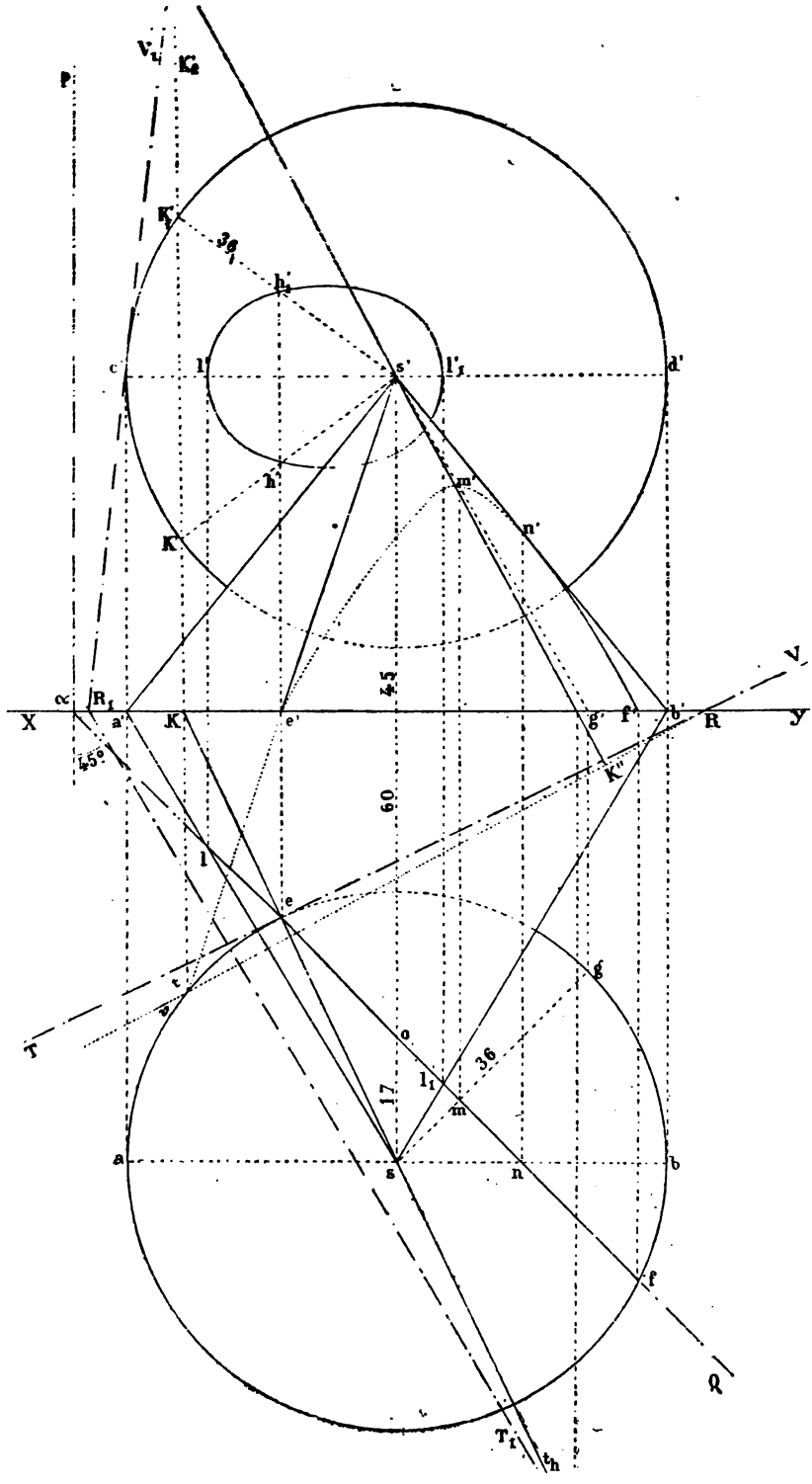
Cela posé on demande :

1° De construire les projections de l'ensemble des deux corps ;

2° De mener, par le point O, un plan vertical faisant un angle de 45° avec le plan vertical de projection et de construire les projections des sections faites dans les deux cônes par ce plan ;

3° De mener, par l'un des points où la trace horizontale du plan sécant rencontre la base du premier cône, un plan tangent à ce premier cône ;

4° Enfin de mener un plan tangent au second cône perpendiculairement à ce premier plan tangent.



P
V1
K2
K1
36
h1'
c'
l'
s'
l'1
d'
h'
m'
n'
K'
V
α
R1
X
a'
K
e'
45
g'
f'
b'
R
Y
45°
K''
60
l
e
g
t
T
o
36
l1
17
m
a
s
n
b
f
Q
T1
th

Solution par M. A. Bourgueret, professeur à l'École J.-B. Say.

1° Les projections du cône à axe vertical sont *asb*, *a's'b'*; celles du cône à axe horizontal sont *a'sb'*, *c's'd'*. Ces projections se recouvrent mutuellement, en partie, ce qui est indiqué par le pointillé.

2° Le plan sécant vertical passant par le point *o* et faisant 45° avec le plan vertical de projection est PαQ; il coupe le cône vertical suivant une branche d'hyperbole *emnf*, *e'm'n'f'* et le cône horizontal suivant une ellipse ll_1, $l'l_1$.

Si l'on avait tracé la 2e nappe du cône vertical, on aurait obtenu les deux branches de l'hyperbole. Le point *mm'*, situé au milieu de *ef*, *e'f'*, est le point le plus haut de la courbe, celui où la tangente serait horizontale; le point *nn'*, situé sur le contour apparent vertical, est la séparation de la partie vue *n'f'* et de la partie cachée *n'm'e'*.

Pour trouver un point quelconque soit de l'ellipse, soit de l'hyperbole, on emploie un plan sécant auxiliaire vertical passant par le point *s*, *s'*, qui donne, dans les cônes, deux génératrices, et, dans le plan PαQ, une droite verticale.

3° Le plan tangent au cône vertical VRT, a été mené suivant la génératrice *se*, *s'e'* dont la trace verticale est en t_v.

4° Pour mener un plan tangent au cône horizontal, qui soit, en même temps, perpendiculaire au plan VRT, il suffit d'abaisser du sommet *ss'* une perpendiculaire K*est*$_h$, K'$_2$*s'*K'' sur ce dernier et de faire passer par cette perpendiculaire le 2me plan tangent demandé $V_1R_1T_1$.

ACADÉMIE DE RENNES

Concours académique de mathématiques élémentaires (1877).

Deux circonférences O et O' se coupent à angles droits en A et B. Mener une sécante O'CD telle que le rapport $\frac{AC}{AD}$ soit donné = K.

2° Déterminer les différentes valeurs que peut prendre ce rapport.

3° Calculer $\frac{BC}{BD}$.

4° Calculer les angles que fait la sécante O'CD avec OO', OA et O'A.

5° Parmi toutes les circonférences orthogonales à O', y en a-t-il d'autres que O qui donnent lieu à la même droite O'CD pour le même rapport K?

Concours académique de mathématiques spéciales (1877).

Étant données deux paraboles de même sommet et dont les axes sont perpendiculaires : 1° trouver le lieu des points tels qu'une tangente menée à une parabole et une tangente menée à l'autre soient perpendiculaires.

2° Trouver les points pour lesquels les quatre tangentes sont perpendiculaires deux à deux.

3° Former l'équation de la tangente réelle commune aux deux paraboles.

4° Trouver le lieu de la projection du sommet commun sur cette tangente commune, quand le point dont les projections sur les axes sont les foyers décrit une circonférence *ayant son centre au sommet commun.*

Nota. — Les mots *soulignés* n'étaient pas dans le texte; mais il fallait l'entendre ainsi.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE CAEN

Classe de mathématiques élémentaires, 1877.

1re question. — On considère plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante, et on demande dans quel cas il est nécessaire de prendre ces facteurs égaux entre eux, pour rendre leur produit maximum; expliquer pourquoi cette condition n'est pas toujours nécessaire, mais est toujours suffisante. Étudier comme exemples les produits suivants :

$$(x+3)(2y-1)(2x-y+4)(14-3x-y)$$
$$x(2x-1)(8-3x)$$
$$(x-1)(y-2)(2x-3y+7)(12-3x+2y)$$

On montrera que les deux derniers produits sont susceptibles d'un maximum, quoiqu'on ne puisse rendre leurs facteurs égaux.

2me question. — Sur deux droites rectangulaires données, qui se coupent en un point O, on prend respectivement deux longueurs variables OA et OB, dont la somme reste constante : lieu géométrique des points d'intersection du cercle circonscrit au triangle OAB, et de la droite menée par le point O, parallèlement à la droite AB.

ACADÉMIE DE GRENOBLE

Concours de 1876.

On donne deux sphères tangentes extérieurement, de rayon R et r; on leur circonscrit un cône S. Trouver l'expression du volume compris entre les deux sphères et le cône.

Concours de 1875.

On donne un angle XOY, et une circonférence tangente à ses deux côtés. Mener une troisième tangente au cercle telle qu'elle forme avec les côtés de l'angle un triangle d'aire donnée.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Concours de 1876.

On donne deux droites qui se coupent et un point situé ou dans le plan de ces deux droites ou en dehors de ce plan.

Déterminer sur l'une des droites un point également distant de l'autre droite et du point donné. — Solution géométrique. — Trigonométrique.

Corollaire 1. — Étant donnés dans l'espace un point, un plan et une droite, trouver sur cette droite un point également distant du point et du plan donnés.

Corollaire 2. — Construire une sphère passant par deux points donnés et tangente à deux plans aussi donnés.

ACADÉMIE DE POITIERS

Concours de 1874.

1. Dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont égales deux à deux; démontrer : 1° que les médianes (droites joignant les milieux des arêtes opposées) forment un trièdre trirectangle; 2° que la somme des carrés des six autres égale quatre fois la somme des carrés des médianes; 3° que si BCD est une des faces, MM′ la mediane qui passe par le milieu de CD et de AB, on a

$$BC^2 + BD^2 - CD^2 = 2\,MM'^2.$$

2. Résoudre un triangle rectangle connaissant la hauteur h, et le rayon du cercle ex-inscrit r', qui touche l'un des côtés de l'angle droit.

FACULTÉ DES SCIENCES DE POITIERS

Trouver les angles que font trois forces f, f', f'' qui se font équilibre, ces forces étant proportionnelles à $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5-\sqrt{6}}$.

(22 juillet 1874.)

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS

pour l'École militaire de Belgique.

1. *Arithmétique.*

Donner la théorie de la racine cubique.

Ecrire un nombre donné dans la base 9, dans le système de numération à base 7, sans passer par la base 10.

2. *Trigonométrie.*

Résoudre un triangle connaissant

$$a = 51^m, 813$$
$$b = 29, 62$$
$$A = 88^\circ\ 12'\ 41''.$$

Démontrer que dans un triangle sphérique on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}.$$

3. *Algèbre.*

Trouver la génératrice de la fraction continue périodique mixte.

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \text{etc.}}}}}}}$$

Démontrer que le nombre de solutions entières et positions de $ax + by = c$ est égal au quotient par excès de $\frac{c}{ab}$.

4. *Géométrie.* — Par un point donné, mener un plan qui coupe une sphère donnée suivant un cercle de rayon donné.

Démontrer que si, dans un rectangle ABCD, on abaisse de A la perpendiculaire AE sur BD, et que l'on mène EF parallèle à AB, EG parallèle à AD, on a

$$\frac{AB^3}{AD^3} = \frac{EF}{EG}.$$

5. *Géométrie analytique.*

Chercher l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Dans une ellipse, on mène par les extrémités du grand axe deux cordes supplémentaires. Par le centre et le foyer, on mène des parallèles à ces cordes. Trouver le lieu des points de rencontre.

QUESTIONS PROPOSÉES

dans les examens de l'École Centrale.

Une population de 100,000 habitants augmente chaque année de 1/32 de ce qu'elle était à la fin de l'année précédente, et elle diminue 1° par suite des décès, de 1/37 de cette même valeur; 2° de 300 personnes, chaque année, par suite d'émigrations.

On demande de déterminer l'époque à laquelle cette population se trouvera augmentée du quart du nombre primitif. *(Août 1863.)*

Soit TT′ la tangente en A, à un cercle donné OA. On mène dans le cercle un diamètre BC et on abaisse des points B et C les perpendiculaires BB′, CC′ sur la tangente TT′. Déterminer la position du diamètre BC de façon que la surface *totale* du tronc de cône engendré par le trapèze BB′CC′, en tournant autour de TT′, soit dans un rapport donné *m* avec la surface du cercle OA. On dira dans quelles conditions le problème est possible. *(Août 1863.)*

Calculer les côtés et la surface d'un triangle, dans lequel on connaît les deux angles et le côté adjacent

$$A = 30^\circ\ 17'\ 20''$$
$$B = 125^\circ\ 15'\ 16''$$
$$C = 1872^m,\ 35$$

(Août 1863.)

On donne une parabole et un point fixe I dans son plan. Par le sommet A de la parabole on mène une corde quelconque AB; on projette le point B en C sur la tangente au sommet et l'on joint le point C au point I. La droite CI rencontre la droite AB en un point M dont on demande le lieu. Discuter en faisant varier la position du point I dans le plan et examiner en particulier le cas où le point I est au foyer de la parabole donnée. *(Août 1863.)*

Une compagnie a émis des actions au prix de 210 francs. Les actions ont rapporté par an, pendant 25 ans, 9 francs chacune et pendant 31 années suivantes, 9 fr. 75 c. A ce moment, on les amortit par un remboursement tel que toutes les sommes reçues, augmentées de leurs intérêts composés à 6 o/o, représentent le capital primitif et ses intérêts capitalisés à 8,25 o/o. On demande ce que devra recevoir chaque actionnaire au moment du remboursement.

(2e serie, octobre 1863.)

On donne une sphère de rayon R et la surface totale d'un cône droit circonscrit à cette sphère. 1° Calculer la hauteur de ce cône. 2° De tous les cônes droits circonscrits à cette sphère; quel est celui dont la surface totale est à son minimum. 3° Montrer que le volume est à son minimum dans les mêmes circonstances. *(2e série, octobre 1863.)*

Résoudre dans les deux cas possibles, un triangle, dont

on connaît deux côtés a et b et l'angle A opposé au premier. Calculer ensuite la surface de ce triangle et l'exprimer en unités agraires.

$$a = 2873^{m},57$$
$$b = 3001^{m},75$$
$$A = 31^{\circ}\ 27'\ 13''$$

(2e série, octobre 1863.)

On donne deux droites fixes RR′ et SS′ qui se coupent en un point O, et dans le plan de ces deux droites, on fait mouvoir une troisième droite PQ de longueur variable, de façon que le triangle POQ, formé par la droite mobile et les deux droites fixes ait une aire constante. Au point P, où la droite PQ rencontre RR′, on mène une perpendiculaire à RR′; de même au point Q, où la droite PQ rencontre SS′, on mène une perpendiculaire à SS′. Trouver l'équation du lieu décrit par le point de rencontre M de ces deux perpendiculaires. Construire ce lieu et déterminer ses axes principaux en grandeur et en position. *(Octobre 1863.)*

On donne un cône droit. Dans la section méridienne A′S′B′ de ce cône on inscrit un cercle OK. Ce cercle est la section droite d'un cylindre.

Chercher l'intersection de ce cylindre et du cône.

(1863.)

Intersection d'un cône et d'un cylindre. Le cône est de révolution; l'axe est vertical; la hauteur est $0^{m},09$; le rayon de la trace horizontale est $0^{m},065$, la distance du centre de cette trace au plan vertical est 0,06.

Le cylindre a ses génératrices parallèles au plan horizontal et inclinées de 30° sur le plan vertical; la trace horizontale du cylindre se compose de deux tangentes à la base du cône; la trace verticale est un cercle dont le centre est sur la ligne de terre.

Construire spécialement les points remarquables de la courbe et la tangente en un point de l'intersection.

(1863.)

MÉLANGES

DU ROLE DE L'EXPÉRIENCE

DANS LES SCIENCES EXACTES

par M. J. Hoüel, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux.

(Voir page 118.)

IV

Au point de vue de l'étendue, un corps ne se distingue d'un autre que par ses limites. C'est donc sur les limites des corps que devra porter exclusivement l'étude de l'étendue. Deux corps qui ont les mêmes limites sont identiques au point de vue géométrique.

De même que l'on connaîtrait la forme d'un corps matériel, si l'on pouvait en détacher, sans la déformer, l'enveloppe qui le contient, on supposera le corps idéal entouré d'une enveloppe sans épaisseur, et la matière du corps retirée de cette enveloppe, ou anéantie. C'est cette enveloppe ou *surface* qui constituera, à proprement parler, le corps géométrique. Pareillement, l'étude d'une portion de surface se ramènera à celle des limites de ses parties, ou des *lignes*, l'étude des lignes à celle de leurs limites, ou *points*.

La Géométrie est fondée avant tout sur l'hypothèse de l'existence d'un espace *immobile* et *indéfini*, dans lequel on peut conserver l'indication du lieu occupé à un instant donné par un corps, et où les corps géométriques peuvent se déplacer en conservant identiquement les propriétés qui correspondent à la notion physique de solidité. On admet que deux corps solides, qui ont pu tour à tour coïncider avec un troisième, sont susceptibles de coïncider entre eux, dans quelque partie de l'espace qu'on les transporte l'un et l'autre.

La propriété de l'invariabilité des figures, que nous avons prise comme point de départ, ne peut, non plus que celle

de l'immobilité de l'espace, admettre une définition rigoureuse. Nous ne pouvons, en effet, observer que des changements relatifs de figure et des déplacements relatifs. Tout ce que nous affirmons relativement à l'identité absolue de lieu et de forme est uniquement fondé sur l'identité de nos sensations. L'hypothèse de l'invariabilité de figure ne peut, par conséquent, être assise sur des expériences susceptibles d'une approximation indéfinie, et présentant une certitude objective. Nous l'acceptons, parce qu'elle nous semble plus conforme à nos impressions physiologiques, et qu'elle explique de la manière la plus simple les phénomènes qui affectent nos sens.

Cette hypothèse n'a pas besoin d'être admise tout d'abord dans son entière généralité, et l'étude de la Géométrie montre que son ensemble découle comme conséquence de certains cas particuliers convenablement choisis.

La notion d'invariabilité de forme étant admise, c'est l'expérience qui nous suggère celle de la possibilité du transport d'un corps invariable dans l'espace tel que nous le connaissons, absolument comme une figure plane ou sphérique peut être déplacée sur le plan ou sur la sphère sans changer de forme. Mais il ne serait pas absurde *à priori* de supposer l'existence d'un espace dans lequel ce transport serait impossible sans une déformation plus ou moins profonde, absolument comme cela a lieu pour une figure tracée sur un cône ou sur un ellipsoïde.

Une autre notion essentiellement expérimentale, c'est la distinction entre la droite et la gauche, sans laquelle il serait impossible de définir indépendamment l'une de l'autre deux rotations effectuées autour d'un même axe dans des sens opposés. Cette notion ne peut évidemment s'expliquer qu'en la rapportant à notre propre corps.

L'expérience nous apprend ensuite qu'un corps matériel, fixé par un seul de ses points, peut prendre une infinité de positions différentes.

Il en est de même aussi d'un corps fixé par deux de ses points; seulement, dans ce cas, la liberté du mouvement est plus restreinte.

On constate ensuite que, lorsqu'un corps tourne autour de deux de ses points, il y a, outre ces deux points, une suite continue d'autres points, en nombre infini, qui restent immobiles pendant le mouvement du corps. Cette suite s'étend, non-seulement entre les deux points fixes, mais encore au delà, dans les deux sens, quelque loin que le corps soit prolongé. Elle forme une ligne s'étendant indéfiniment des deux côtés, et à laquelle on donne le nom de *ligne droite.*

De ce mode de génération il résulte que deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue. En d'autres termes, par deux points donnés on peut donc mener une ligne droite, et une seule (1).

Si, enfin, on fixe trois points d'un corps, le corps cesse d'être mobile, à moins que ces trois points ne se trouvent en ligne droite.

L'expérience fait naître en nous l'idée d'une surface superposable à elle-même par retournement, et par suite comprenant tout entière une ligne droite avec laquelle elle a deux points communs (2). Cette surface est le *plan.*

Telles sont les principales hypothèses sur lesquelles s'appuient les vingt-huit premières propositions d'Euclide, et qui conduisent à la démonstration de l'existence des parallèles. On pourrait poursuivre l'étude de la Géométrie sans admettre d'hypothèse nouvelle, et les travaux de Lobatchefsky et de J. Bolyai ont fait voir que les précédentes suffisent à elles seules pour la construction d'une géométrie complète, comprenant comme cas particulier celle que l'expérience nous indique comme la plus conforme aux propriétés réelles de l'étendue.

(A suivre).

---

(1) Lobatchefsky et W. Bolyai ont essayé de se passer de cet axiome de la ligne droite, en démontrant, à l'aide des propriétés intuitives de la sphère, l'existence du plan, dont ils tirent celle de la ligne droite, comme conséquence. Mais leur démonstration présente encore quelques points obscurs, qui n'ont pas été complétement éclaircis.

(2) On a donné une démonstration de cette propriété, en partant de la définition du plan comme lieu d'une droite glissant sur les deux côtés d'un angle. Voir *V. Valeriani*, Giornale di Matematiche, t. VII, p. 376.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 25 GÉNÉRALISÉE

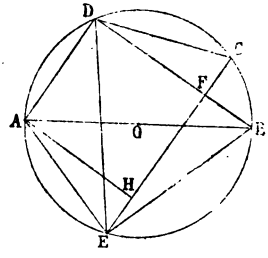
par M. Bergeron.

Parmi tous les quadrilatères inscrits dans une demi-circonférence donnée, quel est celui dont l'aire est maxima?

Nous nous appuierons sur le théorème suivant, énoncé dans les *questions* de *trigonométrie* de M. Desboves (page 225), et que l'on peut facilement démontrer par la géométrie.

Théorème. — *Si l'on inscrit dans un même cercle un quadrilatère convexe dont l'un des côtés soit un diamètre, et un triangle tel que deux de ses angles soient respectivement égaux aux angles que le diamètre considéré fait avec les deux côtés du quadrilatère qui lui sont adjacents, les aires des deux figures sont équivalentes.*

Soit ABCD un quadrilatère inscrit dans la demi-circonférence ADB. Par le point C menons à AD la parallèle CE, et tirons les droites DE, DB, EB. Le triangle DEB satisfait aux conditions de l'énoncé, car les angles DEB, DAB, inscrits dans le même arc, sont égaux; et les angles DBE, CBA, composés d'une partie commune, et de deux parties égales DBC, ABE, sont égaux aussi.



Cela posé, tirons AE, et du point A abaissons sur CE la perpendiculaire AH. Le triangle DFC est rectangle en F, car CE, parallèle à AD, est perpendiculaire sur DB. Par suite, les triangles rectangles AHE, DCF, ayant l'hypoténuse égale, et les côtés DF et AH égaux, sont égaux aussi, et l'on a EH = CF; ou, en ajoutant de part et d'autre les quantités égales DA et HF

$$\overline{EF} = \overline{CF} + \overline{AD};$$

d'où $$\overline{EF} \times \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{CF} \times \frac{\overline{BD}}{2} + \overline{AD} \times \frac{\overline{BD}}{2}.$$

Mais le premier membre de cette égalité exprime la surface du triangle BDE, et, le second, la somme des surfaces des triangles DBA, DBC, c'est-à-dire, la surface du quadrilatère ABCD. Le théorème est donc démontré.

Proposons-nous dès lors de trouver le maximum de l'aire du triangle DBE. Supposons que le côté DE reste fixe et que le point B se déplace sur l'arc EBD. La base ED du triangle restant constante, la surface du triangle sera maxima quand la hauteur correspondante le sera elle-même, c'est-à-dire, lorsque le point B sera au milieu de l'arc EBD : alors le triangle est isoscèle. Mais comme le côté que l'on a laissé constant est l'un quelconque des trois côtés, on en conclut que deux côtés quelconques du triangle dont l'aire est maxima sont égaux, et, par suite, que le triangle demandé est équilatéral.

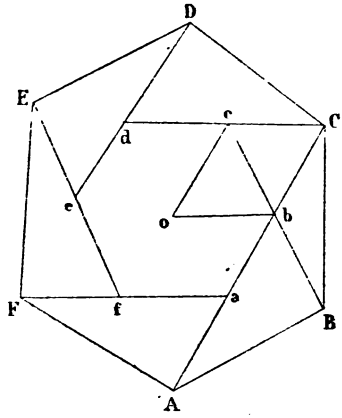
Or, à chacun des triangles DBE, correspond un quadrilatère équivalent ABCD, et réciproquement. Donc, au plus grand des triangles inscrits dans la circonférence correspond le plus grand des quadrilatères inscrits dans la demi-circonférence. Par suite, l'aire du quadrilataire ABCD sera maxima quand ses angles en A et en B seront tous deux égaux à 60°, c'est-à-dire, quand la figure ABCD sera la moitié de l'hexagone régulier inscrit dans la circonférence.

QUESTION 21.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Démontrer que si l'on prolonge dans le même sens les côtés d'un hexagone régulier, de longueurs égales à ces côtés, et si l'on joint les extrémités de ces prolongements, on forme un autre hexagone régulier dont la surface est triple de celle du premier.

Soient E et F deux sommets consécutifs du polygone, obtenus en prolongeant les côtés AB et BC. Il faut démontrer que EF est le côté d'un hexagone régulier. En effet, joignons OE. Le triangle ADE étant équilatéral, la droite OE est perpendiculaire aux droites AD et BC; mais les points B et C étant situés sur les milieux des côtés AE et



ED, le point I est également le milieu de OE. Par suite la droite IF est perpendiculaire sur le milieu de OE, donc les droites OF et EF sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire. On a donc

$$OF = FE$$

Le même raisonnement appliqué au point J donnera

$$OE = EF$$

et par suite

$$OE = OF = EF$$

On aura de même $FH = OF$ et $OFH = OFE$

Donc les droites FE, FH sont les côtés d'un hexagone régulier dont le centre est le centre de l'hexagone primitif.

Menons OC. Le triangle OCD a pour mesure $OJ \times JC$; Le triangle OEF a pour mesure $OJ \times JE$. Mais les droites FI et JE étant médianes, OEF leur point de rencontre, C se trouve au tiers de leur longueur, donc

$$JE = 3JC$$

et par suite la surface du grand triangle égale trois fois celle du petit, ce qui démontre le théorème.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Pillard, au petit séminaire de Belley; Voituron, Orth, Long, à Liége; Chanier, Perrin, à Clermont-Ferrand; Fouquoire, Corbeau, à Saint-Quentin; Hugentobler, école J.-B. Say, à Paris; Vautré; Brot, école Lavoisier, à Paris; Duflot, lycée Fontanes (Inst. Marc-Dastès); Biette, au Havre; Nigri et Comandré, à Pau; Neveux, à Charleville; Aurenty, à Marseille; Nencini, à Fribourg; Lorain, au collége de Semur; Moulin, à Lorient; Everty, collége Chaptal; Le Blondel, collége de Meaux.

Toutes ces solutions se ramènent à prouver que les triangles extérieurs E*e*D, D*d*C, etc., sont égaux et que chacun d'eux est le double du triangle formé par deux rayons et un côté de l'hexagone; donc la portion ajoutée à l'hexagone a une surface double de celle de l'hexagone; c. q. f. d.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 9964-7.

PRODUIT DE DEUX DÉTERMINANTS.

Démonstration élémentaire.

Soient les trois déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} m & p & q \\ m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} am+bp+cq & am'+bp'+cq' & am''+bp''+cq'' \\ a'm+b'p+c'q & a'm'+b'p'+c'q' & a'm''+b'p''+c'q'' \\ a''m+b''p+c''q & a''m'+b''p'+c''q' & a''m''+b''p''+c''q'' \end{vmatrix}.$$

Développons D en sommes de déterminants plus simples, dont les colonnes seront trois colonnes prises chacune dans l'un des groupes différents qui composent D; nous obtiendrons une somme de déterminants tels que :

$$\begin{vmatrix} am & bp' & am'' \\ a'm & b'p' & a'm'' \\ a''m & b''p' & a''m'' \end{vmatrix} = mp'm'' \begin{vmatrix} a & b & a \\ a' & b' & a' \\ a'' & b'' & a'' \end{vmatrix}$$

Après le développement on aura

$$D = M\Delta$$

M étant un polynôme entier formé des éléments de Δ'. Changeons maintenant dans D les lignes en colonnes, et réciproquement; le même raisonnement nous donnera

$$D = A\Delta'$$

A étant un polynôme entier formé des éléments de Δ seulement.

Donc $$M\Delta = \Delta\Delta'$$

Il résulte de là que le polynôme Δ' doit diviser M et que l'on a : $$M = \lambda\Delta'$$

λ étant un facteur numérique indépendant des éléments de Δ et de Δ'. Donc : $$D = \lambda\ \Delta\Delta'.$$

Mais dans D il y a l'élément $aa'a''mm'm''$, dans $\Delta\Delta'$ il y a aussi l'élément $aa'a''mm'm''$, donc λ doit être égal à *un* pour qu'il y ait identité, donc enfin

$$D = \Delta\Delta'.$$

Règle. — *Si l'on nomme produit des deux lignes*

a b c

m p q

la somme am + bp + cq, *on peut dire que le produit de deux déterminants est un déterminant dont les colonnes s'obtiennent en multipliant successivement toutes les lignes du premier par chacune des lignes du second.*

NOTE SUR LA RACINE CARRÉE

Dans les traités d'arithmétique on trouve la racine carrée d'un nombre en imaginant la racine décomposée en dizaines et unités, quand elle est plus grande que 10; et par une série de raisonnements simples on arrive à déterminer successivement tous les chiffres de la racine, en se servant toujours du même principe.

Il est avantageux cependant de donner la plus grande extension à l'idée fondamentale et de supposer la racine décomposée en dizaines et unités, ou en centaines et unités, ou en mille et unités, etc., suivant les cas. Nous allons montrer que, par cette généralisation, la méthode dite *extraction abrégée de la racine carrée* n'est que l'application de la méthode générale connue.

Théorème 1. — *On trouve exactement les dizaines, ou les centaines, ou les mille..... de la racine carrée d'un nombre, en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans les centaines, ou dans les dizaines de mille, ou dans les millions....*

Prenons en effet un nombre quelconque

56.789.012.

Extrayons la racine du plus grand carré contenu dans les millions, nous trouvons 7. Par hypothèse

$$7^2 < 56 < 8^2$$

La première inégalité n'exclut pas l'égalité, car le nom-

bre des millions pourrait être un carré parfait, mais les deux derniers nombres diffèrent au moins d'une unité. De ces inégalités on déduit :

$$7^2 . 1000000 < 56000000 < 8^2 . 1000000$$

Les deux derniers nombres diffèrent maintenant d'au moins un million, donc nous pouvons ajouter au nombre intermédiaire 789.012, la seconde inégalité subsistera encore et la première à fortiori. On aura donc

$$(7000)^2 < 56789012 < (8000)^2$$

Donc la racine renferme 7 mille et n'en renferme pas 8; c. q. f. d.

Remarque. — Quand on a obtenu soit les dizaines, soit les centaines, soit les mille..... de la racine, on en fait le carré et l'on retranche ce carré du nombre proposé. Nous nommerons *reste* le résultat de cette soustraction. Ce reste contient le double produit des unités par les dizaines, ou les centaines, ou les mille..... plus le carré des unités, plus le reste final de l'opération, si le nombre proposé n'est pas un carré parfait.

Théorème 2. — *On obtient une limite supérieure du nombre des unités, en divisant le reste par le double des dizaines, ou le double des centaines, ou le double des mille.....*

Ce théorème est évident, d'après la remarque précédente, puisque le dividende que l'on prend est supérieur en général, au moins égal toujours au double produit des unités par les dizaines, ou les centaines, ou les mille.....

Remarque. — Pour faire cette division du reste par le double des mille, par exemple, on divisera d'abord par mille, puis par le double du nombre des mille, ce qui revient à diviser, par le double du nombre des mille les mille du reste. C'est la règle donnée habituellement.

Dans le cas qui nous occupe le reste est

7.789.012.

Il faudrait donc diviser 7789 par 14. Le quotient 556 serait une limite supérieure du nombre des unités.

Théorème 3. — *On obtient une limite inférieure du nombre des unités, en divisant le reste par le double plus un des dizaines, ou des centaines, ou des mille.....*

1° *Ce quotient est toujours inférieur soit à* 10, *soit à* 100, *soit à* 1000..... En effet, considérons le cas particulier que nous traitons. Nous avons démontré que le nombre proposé est inférieur au carré de 8000. Or :

$$(8000)^2 = (7 + 1)^2 . 1000000 = 7^2 . 1000000 + (2 . 7 + 1) \times 1000000 = 49000000 + 15000000$$

Donc le reste $56789012 - 49000000 = 7789012$ est inférieur à 15000000; donc

$$\frac{7789012}{15000} < 1000$$

c. q. f. d.

2° *Ce quotient est une limite inférieure du nombre des unités.* Ce quotient est ici 519 (pris par défaut, ce qui est toujours sous-entendu). Nous avons donc

$$7.789012 > 15000 . 519$$

d'où aussi

$$56789012 > 49000000 + 14000 . 519 + 1000 . 519.$$

Remplaçons dans le dernier terme du second membre 1000 par le nombre inférieur 519 (1°), nous aurons à fortiori

$$56789012 > (7000 + 519)^2$$

donc 519 est une limite inférieure du nombre des unités; c. q. f. d.

Théorème 4. — *Les deux limites diffèrent au plus d'une unité lorsque le nombre des dizaines est au moins* 5 *ou lorsque le nombre des centaines est au moins* 50, *ou lorsque le nombre des mille est au moins* 500.....

Raisonnons dans le cas où la racine est partagée en mille et unités; désignons par m le nombre des mille, la racine sera donc $1000m + u$. Appelons R le reste obtenu quand du nombre donné on a retranché le carré des mille trouvés. La partie entière du quotient :

$$\frac{R}{1000 . 2m}$$

est la *limite supérieure* du nombre des unités et la partie entière du quotient

$$\frac{R}{1000 \,.\, (2m + 1)}$$

est la *limite inférieure* du nombre des unités. La différence de ces fractions est

$$\frac{R}{1000 \,.\, 2m\,(2m + 1)}$$

ou bien

$$\frac{\left[\dfrac{R}{1000\,(2m + 1)}\right]}{2m}$$

Or nous avons démontré dans le théorème précédent que le numérateur de cette différence est moindre que 1000, si donc m vaut au moins 500, cette différence sera inférieure à *un*. Donc les deux parties entières des deux quotients qui sont les limites en question diffèrent au plus d'une unité dans ce cas; c. q. f. d.

Théorème 5. — *Pour vérifier que la limite supérieure du nombre des unités n'est pas trop forte, il suffit de faire le carré de ce nombre. Si ce carré est inférieur au reste de la division qui a donné la limite supérieure considérée, cette limite représente exactement le nombre des unités et la différence représente le reste final de l'opération.*

En effet, après la soustraction du carré des mille (nous raisonnons toujours sur l'exemple ci-dessus, pour fixer les idées), le reste se compose

du double produit des mille par les unités
+ du carré des unités
+ du reste final de l'opération.

Après la division par le double des mille, le reste nouveau ne contient plus que le carré des unités et le reste final de l'opération. Si donc la division a donné *exactement* les unités pour quotient, le carré de ce quotient sera le carré des unités et devra pouvoir se retrancher du reste de la division.

— Le résultat de la soustraction sera l'exès du nombre sur le plus grand carré qui y est contenu ; c. q. f. d.

Remarque. — Toute l'opération se dispose comme il suit :

56.789012	7
7 789012	14556
78	556
89	3336
Reste de la division..... 5012	2780
	2780
	309136 ..... Carré de la limite supérieure

On voit que la limite supérieure est trop forte.

Corollaire. — Des théorèmes qui précèdent on déduit la règle suivante pour extraire la racine d'un nombre considérable tel, par exemple, que

12 . 34 . 56 . 78 . 90 . 12

1° On partage le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la gauche et l'on extrait la racine de la première tranche à gauche. On a ainsi EXACTEMENT le chiffre des plus hautes unités de la racine.

2° On considère cette racine comme les dizaines de la racine du nombre 1234, on en détermine les unités d'après le second théorème, on obtient ainsi EXACTEMENT les deux premiers chiffres de la racine, et l'excès de 1234 sur le plus grand carré qui y est contenu.

3° On considère la racine obtenue comme les dizaines de la racine du nombre formé par les trois premières tranches à gauche. On détermine les unités d'après le second théorème et en même temps le reste final de l'opération.

4° Au moyen des trois premiers chiffres de la racine on peut par une simple division en déterminer deux autres, en regardant ces trois premiers chiffres comme les centaines de la racine du nombre formé par les cinq premières tranches.

5° Ces cinq premiers chiffres permettraient d'en trouver quatre nouveaux, etc.

Disposition du calcul.

```
12.34.56.78.90.12
 3 34
   34
   956
   256
   2557890
    4518
     30690
     2939412000000
      128532
       582600
        204240
         636960000
         619470876 = reste final.
```

```
351364, 182
6.5 | 70.1 | 702.36 | 70272.4182
  5 |   1 |     36 |       4182
                216 |       8364
                108 |      33456
               1296 |       4182
                    |      16728
                    |   17489124
```

J. B.

QUESTIONS

POSÉES DANS L'EXAMEN ORAL DU CONCOURS DE SAINT-CYR.

Géométrie.

Ier ET IIe LIVRES.

1. — La somme des perpendiculaires menées d'un point quelconque de la base d'un triangle isoscèle aux deux côtés est une quantité constante.

2. — Soit ABCD un trapèze articulé à ses sommets. Le côté AD restant fixe, si le reste de la figure se meut, quelle sera la courbe décrite par le sommet C?

3. — Mener un cercle tangent à deux droites données et passant par un point donné.

4. — On donne trois points qui sont les pieds des hauteurs d'un triangle; construire ce triangle.

5. — Quel est le lieu des milieux de toutes les cordes passant par un point fixe D dans un cercle O?

IIIe ET IVe LIVRES.

1. — Construire un triangle connaissant la base, la hauteur et le rapport des deux autres côtés du triangle.

2. — La longueur d'un arc de 12° est égale à 1 mètre. On demande la longueur du rayon?

3. — On décrit une circonférence sur un diamètre donné AB, on élève le rayon OC perpendiculaire à AB. Par C on mène une droite qui rencontre AB en M et la circonférence en N.

Quelle direction faut-il donner à CMN pour qu'on ait la relation $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = K^2$? Que faut-il pour que $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = K^2$ soit minimum, et quelle sera alors la valeur de l'angle NCO?

4. — Trouver le côté du pentagone, du dodécagone et du pentédécagone inscrits dans le même cercle?

5. — Quel est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes soit constante?

6. — Soit O un cercle et AB une corde prolongée jusqu'au point C. Quel est le lieu des positions du point C telles que le produit $AB \times AC$ soit une quantité constante?

7. — Construire un rectangle étant données sa surface et la différence entre la base et la hauteur.

8. — Deux circonférences extérieures l'une à l'autre étant données, trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun de ces points aux deux circonférences soient égales.

9. — On donne un tiangle équilatéral ABC, et un point P sur la base, on demande de mener MN parallèlement à la base de telle sorte que $MP = 2MN$. Interpréter les deux solutions.

10. — Deux circonférences extérieures l'une à l'autre étant données, trouver le lieu géométrique des points d'où l'on verrait les circonférences sous le même angle.

11. — Trouver le lieu géométrique des points tels que la différence des carrés de leurs distances aux deux extrémités d'une droite soit une quantité constante.

12. — Inscrire un décagone régulier dans une circonférence.

13. — Par un point K pris dans l'intérieur d'un angle ABC mener une droite DE qui rencontre les deux côtés de l'angle, de telle sorte que les deux parties DK et KE de la droite soient dans un rapport donnée $\frac{m}{n}$.

14. — Partager un trapèze en deux parties équivalentes par une droite partant de l'un des sommets.

15. — On donne un trapèze ABCD, et on demande de mener par D une ligne qui prolongée jusqu'à son intersection avec le prolongement de AB forme un triangle ayant une surface égale au quart de la surface du trapèze.

16. — Un rectangle a pour côtés 12 mètres et $0^m, 2$; trouver à un décimètre près le côté du triangle équilatéral équivalent.

17. — Construire un hexagone régulier équivalent à un carré donné.

18. — On donne une demi-circonférence O et un point P situé sur le diamètre prolongé. On demande de mener par le point P une sécante PCD telle que le triangle COD ait une surface donnée K^2.

19. — Construire un triangle rectangle qui ait pour base un côté donné d'un quadrilatère et une surface équivalente.

20. — Les surfaces de deux triangles semblables sont entre elles dans le rapport $\frac{7}{12}$. Quel est le rapport des côtés homologues?

21. — Construire un triangle équilatéral équivalent à un carré donné.

22. — Faire un carré équivalent à un triangle équilatéral.

23. — On donne un triangle rectangle, trouver sur l'hypoténuse un point M tel que le produit BM . CM soit égal à la surface du triangle.

24. — Partager un triangle en deux parties équivalentes par une droite parallèle à l'un des côtés.

25. — Étant donnés un angle et un point à l'intérieur de cet angle, mener une droite formant un triangle d'une surface égale à une surface donnée.

Ve, VIe, VIIe Livres.

1. — Étant donnés deux plans parallèles, mener un plan parallèle aux deux plans donnés et qui soit deux fois plus éloigné du premier que du second.

2. — Couper une pyramide par un plan parallèle à sa base, de façon à détacher une seconde pyramide dont la surface soit $\frac{1}{3}$ de celle de la première.

3. — On donne un tronc de cône; le rayon de la grande base est de 10 mètres, celui de la petite de 5 mètres, l'apothème a 8 mètres. On demande à un centimètre près le rayon du cercle dont la surface serait égale à la surface totale du tronc de cône.

4. — Étant donné un cône, le couper par un plan parallèle à sa base, de manière que la surface latérale du petit cône ainsi formée soit $\frac{1}{5}$ de la surface latérale du grand cône.

5. — Trouver le rayon d'une sphère impénétrable.

VIIIe Livre.

1. — Étant donnée une circonférence O, un point extérieur A et deux tangentes AT, AT' issues de ce point, on mène en T le diamètre TM perpendiculaire à AT et du point T' on abaisse en K une perpendiculaire sur ce diamètre et on joint le point A au point K. On fait tourner la figure autour du diamètre et on demande de prouver que le volume engendré par le triangle AKT est égal à celui engendré par AT'MT.

2. — On donne un cercle, et dans ce cercle un diamètre AB; on demande de mener dans ce cercle AM telle que l'on ait la relation suivante :

$$\text{Surf. corde AM} + \text{surf. MP} = \text{zone AM}.$$

« Le calcul montre que le point P divise la longueur AB en moyenne et extrême raison. »

3. — Étant donnés une circonférence, un diamètre prolongé jusqu'à un point C et une tangente MC au cercle menée de ce point C, on demande quelle est la position à donner au point C pour avoir la relation

$$\frac{\text{Surf.AMC}}{\text{Surf. MC}} = \frac{3}{2}$$

4. — Soit O un cercle, AMB un segment circulaire : quel sera le volume engendré par ce segment circulaire si le cercle tourne autour du diamètre BD comme axe ?

5. — Un cercle O et une corde AB étant donnés, calculer le volume engendré par le segment circulaire AMB dans la révolution du cercle autour du diamètre CD comme axe. — Quel est le rapport du volume engendré par le segment AMB au volume engendré par le cercle entier, si l'on suppose l'arc AMB égal à un quart de circonférence?

6. — On inscrit un cercle dans un triangle équilatéral ABC et on abaisse la perpendiculaire AD. Si la figure tourne autour de AD comme axe, quel sera le rapport entre le volume engendré par le triangle et le volume engendré par le cercle?

Courbes.

1. — Étant données une ellipse, une tangente à cette ellipse et une perpendiculaire menée d'un des foyers de l'ellipse à cette tangente, trouver le lieu géométrique du point de rencontre de la perpendiculaire et de la tangente.

2. — Si des foyers d'une ellipse on abaisse des perpendiculaires à une tangente à cette ellipse, le produit de ces perpendiculaires est une quantité constante et égale au carré du petit axe.

3. — Soit une ellipse FF' et deux tangentes AC, CB à cette ellipse qui se rencontrent au point C. Démontrer qu'en joignant les foyers F et F' au point C, on forme des angles ACF, BCF' qui sont égaux.

Descriptive.

1. — On donne les traces d'un plan et les projections d'une droite, trouverleur angle.

2. — Trouver l'angle de deux plans dont on donne les traces. — Examiner le cas où les deux plans passent par un même point de la ligne de terre.

3. — Trouver l'angle d'une droite avec le plan horizontal.

4. — Trouver l'angle de deux droites dont on donne les projections.

Examiner le cas où l'une des droites est parallèle à la ligne de terre.

5. — Les projections de deux droites qui se coupent étant données, trouver l'angle de ces deux droites.

Examiner le cas où les projections horizontales des deux droites se confondent.

6. — On a les projections d'une droite et celles d'un point. Mener par le point une seconde droite faisant un angle donné avec la droite donnée.

7. — Trouver l'angle de deux droites qui se coupent sur la ligne de terre.

8. — Par une droite dont on donne les projections, faire passer un plan qui fasse un angle déterminé avec le plan horizontal de projection.

9. — Trouver l'angle de deux plans.

Examiner le cas où l'un des plans est parallèle à la ligne de terre.

10. — Trouver l'angle de deux plans dont les traces se coupent sur la ligne de terre.

11. — On donne les projections d'une droite et celles d'un point, trouver la distance du point à la droite.

Angles d'une droite avec les plans de projection.

12. — Trouver la distance d'un point à un plan donné par ses traces.

13. — Étant données les projections de trois points, trouver les projections du cercle qui passe par ces trois points.

14. — Étant données les trois faces d'un angle trièdre, construire les angles dièdres.

15. — Étant données la base d'une pyramide triangulaire dans le plan horizontal, deux arêtes et la hauteur de la pyramide, construire les projections de cette pyramide.

Le problème est-il possible ?

16. — On donne les projections d'une sphère et la projection horizontale d'un point de cette sphère; trouver la projection verticale de ce point.

17. — Étant données les projections d'une sphère et celles d'une droite qui rencontre la sphère, trouver les projections des points de rencontre.

18. — Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire dont la base est sur le plan horizontal.

19. — Étant données les projections d'un cône et d'un point extérieur, quelles seraient les parties du plan vertical et du plan horizontal cachées par le cône à un observateur qui aurait l'œil au point donné.

20. — On donne les projections d'un cône droit. Mener un plan tangent à ce cône par un point pris hors du cône.

21. — On coupe un cône dont la base se trouve sur le plan horizontal de projection, par un plan perpendiculaire au plan vertical; déterminer la section.

22. — On coupe une pyramide triangulaire dont la base est située sur le plan horizontal, par un plan qui fait un angle α avec le plan horizontal. Déterminer la section.

Mécanique.

1. — Un corps repose sur trois supports. Chercher la pression en chaque point d'appui.

2. — Un corps d'un poids donné repose au centre d'une table qui a trois pieds placés à des distances différentes du centre. Quelle sera la charge supportée par chacun des pieds?

3. — Pour qu'un corps mobile autour d'un point soit en équilibre il faut que le moment de la puissance soit égal au moment de la résistance. En déduire que le travail de la puissance est égal au travail de la résistance.

4. — Conditions d'équilibre d'un corps qui peut tourner autour d'un axe et qui est sollicité par plusieurs forces.

5. — Résultante de deux forces parallèles et de sens contraire, appliquées aux extrémités d'une droite.

6. — Trouver le centre de gravité d'un cylindre formé avec un cylindre en fer et un autre en platine, placés bout à bout.

7. — Deux barres métalliques d'égale longueur et d'égale grosseur ont été

soudées bout à bout. La densité de l'une est 8; celle de l'autre est 21. Trouver le centre de gravité du barreau.

8. — On lance un corps de bas en haut; au bout de 10 secondes il s'arrête; on demande quelle était sa vitesse initiale. On demande en outre l'espace parcouru.

9. — Un corps tombe pendant 10 secondes, on demande l'espace parcouru pendant la dernière seconde.

10. — Un corps tombe librement pendant 10 secondes, on demande l'espace parcouru pendant la neuvième seconde.

11. — Un corps est lancé de bas en haut avec une vitesse initiale de 91^{m},80 par seconde. Dans combien de temps sera-t-il revenu à son point de départ?

12. — Quelle vitesse initiale doit posséder un corps qui tombe dans le vide, pour parcourir 200 mètres en 2 secondes.

13. — Conditions d'équilibre de deux forces appliquées aux moufles.

14. — Condition d'équilibre de deux forces sur le treuil.

15. — Condition d'équilibre d'une romaine. Condition d'équilibre de la poulie fixe.

16. — Comment démontre-t-on dans le treuil que le travail de la puissance est égal au travail de la résistance.

17. — Condition d'équilibre de deux forces appliquées à un levier du second genre.

18. — Travail des forces.

Condition d'équilibre de deux forces qui agissent sur un levier du premier genre.

19. — Conditions que doit remplir une balance, pour être juste et sensible.

20. — Condition d'équilibre de deux forces qui agissent sur un corps qui glisse sur un plan incliné. Mouvement de ce corps.

21. — Étant donné un levier, le disposer de façon à soulever avec un effort de 5 kilog., un poids de 30 kilog.

22. — Travail des forces dans un levier du premier genre.

23. — Conditions d'équilibre de la balance romaine.

NOTE SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ DU TRAPÈZE

par M. **Bezier**, professeur de mathématiques au Lycée de Nevers.

Considérons un trapèze ABCD dont nous désignerons les deux bases AB, CD, par B et *b*. Il a son centre de gravité sur la droite EF qui joint les points milieux E, F, des deux bases et sur la droite HI qui joint les centres de gravité des triangles ABC, ACD. Donc le centre de gravité du tra-

pèze se trouve à l'intersection G de ces deux droites. Menons HK et IL parallèles aux bases du trapèze.

Remarquons maintenant que :

$$IL = \frac{B}{6} \qquad KH = \frac{b}{6}$$

$$FL = KE = LK = \frac{1}{3} EF$$

en vertu des constructions précédentes.

Cela posé les triangles semblables GIL, GKH donnent :

$$\frac{GK}{b} = \frac{GL}{B} = \frac{KL}{B+b} = \frac{GF}{2B+b} \quad \frac{GE}{B+2b}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{GE}{GF} = \frac{B+2b}{2B+b}$$

Ce qui conduit à la construction connue que l'on démontre d'ordinaire à l'aide du théorème des moments des forces parallèles.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (Paris).

Session d'avril.

1. — Calculer à un millimètre près les dimensions du litre sachant qu'il a la forme d'un cylindre dans lequel le diamètre de la base est égal à la moitié de la hauteur.

2. — A quelles conditions doivent satisfaire les nombres positifs a, b, c pour qu'il existe un angle réel A vérifiant l'équation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

3. — Partager un arc de 30° en deux parties telles que le sinus de la première soit triple du sinus de la seconde.

4. — Connaissant $\operatorname{tg} \alpha$ trouver $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$. Application au cas où l'on a $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$.

5. — Sur chacun des côtés d'un rectangle comme hypoténuse, on construit en dehors du rectangle un triangle rectangle isoscèle. Trouver le maximum et le minimum des valeurs

que prend l'aire de la figure totale lorsqu'on fait varier les côtés du rectangle, de manière que la diagonale de celui-ci conserve une valeur constante $2a$.

6. — Calculer le rayon de la base d'un cône circulaire droit, connaissant sa hauteur H et sachant que sa surface totale est égale à la surface latérale d'un cylindre droit de même base et de même hauteur.

7. — La base inférieure d'un tronc de pyramide régulière, à bases parallèles est un triangle équilatéral dont le côté a est donné. Calculer le côté de la base supérieure, sachant que le volume du tronc de pyramide est égal au volume du prisme dont la base est la base inférieure du tronc et la hauteur moitié de celle du tronc.

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Concours de 1876.

Par deux points donnés A et B pris sur une circonférence dont O est le centre et dont le rayon OA est donné, mener deux cordes parallèles AA', BB' telles que le trapèze ABA'B' soit équivalent à un carré donné.

Parmi tous les trapèzes ainsi formés quel est celui dont l'aire est maxima?

ACADÉMIE DE GRENOBLE

Concours de 1876.

On donne deux sphères tangentes extérieurement, et un cône circonscrit à ces deux sphères. On demande : 1° de calculer, en fonction des rayons de ces sphères, le volume V compris entre les trois corps; 2° les centres des deux sphères restant fixes, on demande de calculer les rayons R et r de manière que le volume ait une valeur donnée. — Discussion. — Nombre de solutions. — Conditions de possibilité. — Maximun de volume.

(*Math. élémen.*)

1. — On donne un vase prismatique droit dont le fond est un triangle équilatéral ayant un décimètre de côté, et la hauteur 4 centimètres. Il est éclairé par des rayons lumineux parallèles, situés dans des plans perpendiculaires à la ligne de terre, venant de haut en bas, et à 45° sur les plans de projection. On demande l'ombre sur les parois intérieures du vase.

2. — On a un système de deux poids reliés par un fil ACB, fixé en A, pas-

sant en C sur une poulie mobile supportant le poids Q, et en B sur une poulie fixe; à l'extrémité libre est le poids P. On demande la valeur numérique de l'angle BCD que fait, dans la position d'équilibre, le fil BC avec la verticale CD : 1° lorsque $P = Q$; 2° lorsque $Q = \frac{P}{10}$; dans ce dernier cas, calculer BC et AC en supposant A et B à la même hauteur et AB = 0m, 50. (*Enseignement spécial.*)

CONCOURS DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 1877

On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC rectangle en A et telles que les tangentes en B et C à ces coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle.

On demande :

1° Le lieu du point de concours des normales en B, C à ces coniques.

2° Le lieu des centres de ces coniques. On distinguera les points du lieu qui sont centre des ellipses de ceux qui sont centres des hyperboles.

3° Le lieu des poles d'une droite quelconque D. Ce lieu est une conique; on considère toutes les droites D pour lesquelles cette conique est une parabole et l'on demande le lieu des projections du point A sur ces droites.

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1877

ACADÉMIE DE BORDEAUX

1. — Résoudre le système d'équations

$$x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a.$$
$$x \sin 3a + y \sin 6a = \sin 9a.$$

Transformer les valeurs obtenues de manière à réduire leurs numérateurs et leur dénominateur commun à des monômes.

Vérifier que les expressions obtenues satisfont aux équations proposées en prenant $a = 141°1'$.

2. — Démontrer que dans un tétraèdre les droites EI, KG qui joignent les milieux de deux couples d'arêtes opposées sont situées dans un même plan parallèle à chacune des arêtes AC, BD du troisième couple. — Démontrer ensuite que si, dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont égales deux à deux, la droite FH, qui joint les milieux d'un de ces couples est perpendiculaire au plan des deux lignes qui joignent les milieux des deux autres couples. (*Mathém. élém.*)

ACADÉMIE DE CAEN

1. — On donne un rectangle dont on prolonge au besoin les côtés, et on demande d'inscrire dans ce rectangle un losange de surface donnée. Remarquer : 1° le cas du losange de surface minimum; 2° le cas du losange équivalent en surface au rectangle; 3° le cas où le losange et le rectangle ont une diagonale commune.

2. — On donne un tronc de pyramide régulière triangulaire dont la hauteur est égale à 4 centimètres; le côté de la petite base a 5 centimètres, et celui de la grande base 10 centimètres. Ce tronc repose sur le plan horizontal par sa grande base dont une arête est perpendiculaire à la ligne de terre; on le fait tourner autour de cette arête jusqu'à ce que la face latérale adjacente vienne s'appliquer sur le plan horizontal. On demande de construire les projections du tronc considéré, d'abord dans sa position initiale, puis renversé sur le plan horizontal. (*Enseignement spécial.*)

ACADÉMIE DE CLERMONT

Trouver le lieu géométrique des sommets des cônes qui coupent une surface du second degré donnée suivant deux coniques dont l'une est fixe et donnée, et dont l'autre mobile, a son plan qui tourne autour d'un point fixe donné. (*Mathématiques spéciales.*) (1)

On donne une circonférence et deux points pris arbitrairement dans son plan; démontrer qu'il y a généralement un point de la circonférence pour lequel le rapport des distances aux deux points donnés est un maximum, et un autre où il est minimum. Déterminer la position de ces points et la valeur du rapport maximum ou minimum. — On suppose en particulier $r = 4$ mètres; les deux points sont à 3 mètres l'un de l'autre et tous deux à une même distance 5 mètres du centre de la circonférence.

(*Mathématiques élémentaires.*)

ACADÉMIE DE DIJON

1. — Dans un triangle ABC on donne l'angle A, et les longueurs n, p des médianes qui aboutissent respectivement aux sommets B, C. On demande de construire géométriquement le triangle et de calculer en fonction des données A, n, p, les longueurs des côtés AC, AB.

2. — On donne un cercle et un point A dans son plan. Déterminer par une formule logarithmique les variations de l'angle sous lequel on voit du point A le diamètre du centre, lorsque ce diamètre prend toutes les directions possibles autour du centre.

(*Mathématiques élémentaires.*)

Dans un rhomboèdre (parallélipipède dont toutes les faces sont des losanges égaux), il existe une diagonale nommée *axe* dont les extrémités O_1, O_2 sont les sommets de deux trièdres, réguliers chacun, et égaux l'un à l'autre. Soient $O_1 A_1$, $O_1 B_1$, $O_1 C_1$, les arêtes du solide qui concourent en O_1, et $O_2 A_2$, $O_2 B_2$, $O_2 C_2$, celles qui concourent en O_2, les lettres étant placées de telle sorte que les droites $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, soient les trois autres diagonales du rhomboèdre; on demande : 1° de démontrer que les points milieux des arêtes $A_1 B_2$, $B_2 C_1$, $C_1 A_2$, $A_2 B_1$, $B_1 C_2$, $C_2 A_1$ sont les sommets d'un hexagone, plan régulier, dont le centre coïncide avec le point milieu de l'axe $O_1 O_2$,

---

(1) Cette composition a été donnée pour un concours entre les académies de Clermont, Dijon et Poitiers.

et dont le plan est perpendiculaire sur cette ligne droite. — 2° de calculer au moyen du côté a du rhomboèdre, et de la valeur commune ω des faces des trièdres O_1, O_2, la longueur de l'axe $O_1 O_2$, et la longueur commune des trois autres diagonales $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$.

Construire les projections d'un rhomboèdre déterminé par les données $a = 4$ cent.; $\omega = 60°$, en supposant l'axe $O_1 O_2$ perpendiculaire sur le plan horizontal et s'y appuyant par son extrémité inférieure O_2; le solide est situé tout entier en avant du plan vertical, et tellement orienté que les projections verticales de deux arêtes quelconques ne fassent pas partie d'une même droite. (*Enseignement spécial.*)

(*Pour les Mathématiques spéciales, voir l'Académie de Clermont.*)

ACADÉMIE DE DOUAI

1. — On donne la projection $A'B' = a$ d'un arc circulaire sur une de ses tangentes, et les distances $AA' = h$, $BB' = h'$ de cette tangente aux deux extrémités de l'arc. On demande :

1° De calculer le rayon R de l'arc.

2° D'obtenir directement une formule approchée très-simple de $\sqrt{2R}$ pour le cas où l'arc n'est qu'une petite fraction d'une circonférence entière.

2. — Étant donné un tétraèdre ABCD, on mène un plan PQ parallèle à deux arêtes opposées AB et CD. On demande : 1° que sont les sections faites dans le tétraèdre par des plans parallèles à PQ; 2° quel est le rapport des deux volumes dans lesquels se trouve divisé le tétraèdre par une lame droite et mobile MN qui le coupe en s'appuyant constamment sur les deux arêtes AD, BC et en restant constamment parallèles au plan PQ.

ACADÉMIE DE GRENOBLE

La figure formée par une demi-circonférence ACA', deux tangentes AB, A'B' menées aux extrémités du diamètre AA', et une troisième tangente touchant la circonférence en C et limitée aux points où elle rencontre les deux premières, tourne autour du diamètre AA'. On demande : 1° de calculer le volume engendré par le triangle BDB', le sommet D étant le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AA'; 2° de calculer le volume engendré par chacun des deux triangles mixtilignes formés par deux des tangentes et l'arc compris; 3° de déterminer le point C par la condition que la différence entre la somme des deux volumes précédents et le volume engendré par le triangle ACA' ait une valeur donnée. (*Math. élémen.*)

1. — On donne un prisme hexagonal régulier, reposant par sa base sur le plan horizontal. Le côté ab de la base du prisme est parallèle à la ligne de terre, et égal à 4 centimètres. La distance oc du centre de l'hexagone à la ligne de terre est aussi de 4 centimètres. On donne un plan pp' dont la trace horizontale passe par le point o, et dont les traces font des angles de 45° avec la ligne de terre. Déterminer la projection verticale de l'intersection et la vraie grandeur de cette section en rabattant sur le plan vertical.

2. — Un mobile tombe suivant AB; il part de A avec une vitesse de 10 mètres par seconde, et il parcourt AB = 100 mètres. Combien mettra-t-il de temps pour venir de A en B, et quelle sera sa vitesse au point B?

(*Enseignement spécial.*)

ACADÉMIE DE LYON

Trouver l'enveloppe des axes des sections coniques tangentes à deux droites données en des points donnés. (*Mathématiques spéciales.*)

1. — Démontrer que $Ax^2 + 2Bxy + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D$ est toujours décomposable en une somme de carrés. — Dans quel cas la décomposition peut-elle faire voir le maximum et le minimum de la fonction? — Cas où elle peut se décomposer en un produit de facteurs linéaires plus un nombre constant.

2. — Trois cercles concentriques étant donnés, ainsi qu'un triangle $A_1 A_2 A_3$ dont les sommets sont respectivement sur les trois cercles, on forme le triangle A_1OB, semblable à ce triangle. Calculer A_2B en fonction des rayons des cercles donnés et de A_1B. En déduire la solution de ce problème: Construire un triangle semblable à un triangle donné et dont les sommets soient respectivement sur trois circonférences concentriques données.

(*Mathématiques élémentaires.*)

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

Étant donnés un ellipsoïde rapporté à son centre et à son axe et une surface quelconque du second ordre, trouver l'équation de la surface S lieu des centres des sections faites dans la deuxième surface par les plans tangents à l'ellipsoïde. En supposant que la deuxième surface soit un hyperboloïde concentrique, et ayant ses axes dirigés suivant les mêmes droites, discuter les courbes qui résultent de l'intersection de la surface S' par les plans de coordonnées. — Chercher l'intersection de cette surface par une surface du second ordre concentrique et homothétique à l'hyperboloïde. En déduire un certain mode de génération de la surface en considérant le rapport de similitude comme paramètre variable. (*Mathém. spéc.*)

Déterminer algébriquement la hauteur et les rayons de bases d'un tronc de cône inscrit à une sphère et dont on donne l'apothème et la surface totale. — Discussion de la formule. — Trouver le volume du tronc de cône et l'aire de la section méridienne. (*Mathém. élém.*)

ACADÉMIE DE NANCY

1. — Étant données deux sphères, déterminer sur la ligne des centres un point tel que la somme des zones visibles de ce point soit maximum ou minimum.

2. — Déterminer les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$\sin(x - a) = \sin x - \sin a.$$

(*Mathém. élém.*)

ACADÉMIE DE PARIS

(*Les Lycées de Paris et de Versailles ne prennent pas part à ce concours.*)

1. — Étant donnés deux cercles et une droite, construire un cercle qui coupe à angle droit les deux cercles ainsi que la droite donnée.

2. — Étant donnée une équation du second degré, en former une seconde qui admette pour racines celles de la première augmentées chacune de leur inverse. (*Mathématiques élémentaires.*)

1. — On donne un plan et la projection horizontale *ab* d'une droite située dans ce plan; on demande de faire passer par cette droite un plan qui fasse avec le premier un angle donné.

2. — Transformation du mouvement rectiligne alternatif en circulaire continu. — Parallélogramme de Watt. (*Enseignement spécial.*)

ACADÉMIE DE POITIERS

Deux sphères O et O′ se coupent. Les rayons de ces sphères sont $b + a$ et $b - a$; la distance des centres est $2c$. Évaluer le volume compris dans la sphère O en dehors de la sphère O′, et dans la sphère O′ en dehors de la sphère O. Comment varie le rapport de ces volumes quand, a et c conservant des valeurs constantes, on fait varier b? (*Mathématiques élém.*)

On donne un solide; les deux bases sont deux carrés; la base inférieure est dans le plan horizontal de projection; la base supérieure est dans un plan horizontal. Les centres des deux bases sont sur une même verticale, mais les côtés de l'une sont parallèles aux diagonales de l'autre. On joint un sommet de la base inférieure aux deux sommets les plus rapprochés de la base supérieure. On coupe le solide ainsi formé par un plan horizontal passant par le milieu de la hauteur.

Représenter : 1° Les projections du solide sachant que l'un des côtés de la base fait un angle de 22° 30′ avec la ligne de terre; 2° Les projections de la section faite par le plan donné.

Calculer la surface de cette section, et le volume du solide.

(*Enseignement spécial.*)

(*Pour les Mathématiques spéciales, voir Académie de Clermont.*)

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1877.

Géométrie descriptive (1h. 30m.).

Trois points A, B, C, du premier dièdre sont dans des plans de profil, distants de 2 centimètres pour les points A et B, et de 6 centimètres pour les points B et C. Le point A est distant de 3 centimètres du plan horizontal

et de 1 centimètre du plan vertical; le point B est distant de 6 centimètres du plan horizontal et de 3 centimètres du plan vertical; le point C est distant de 3 centimètres du plan horizontal et de 2 centimètres du plan vertical. Déterminer les traces du plan qui passe par les deux points A et B, et est distant de 3 centimètres du point C. Mesurer et donner l'angle de ce plan avec le plan déterminé par les trois points donnés.

Algèbre et Trigonométrie rectiligne (2 heures).

Dans un triangle ABC, on donne $b = 517^m,135$; $c = 862,256$, et l'on sait que l'angle A satisfait à la condition

$$\cos 2A = 1,375 (\cos A - \sin A)$$

Résoudre le triangle et calculer la surface.

Arithmétique et Géométrie (2 heures).

Le volume d'un cylindre $\pi R^2 H = 10000^{mc},87$. La hauteur $H = 10^m$. On prend pour π la valeur rigoureuse $\frac{22}{7}$; on trouve ainsi une valeur exacte de R^2, dont on cherche la racine carrée avec 6 décimales; puis on supprimera la quatrième décimale dans R^2, et on calculera de nouveau la racine carrée avec 6 décimales. La comparaison des deux racines confirme-t-elle l'approximation donnée par la théorie?

2. — Dans un cercle donné par son centre et son rayon, on inscrit un triangle rectangle isoscèle BAC. Les bissectrices des angles aigus B et C rencontrent les quadrants opposés en P et Q, et coupent en O' la bissectrice de l'angle droit. Le point O' est le centre du cercle inscrit, dont on demande le rayon. Les points de contact M et N avec les côtés de l'angle droit BA et CA sont sur la droite PQ; le quadrilatère OBMP est un losange; l'on a $MQ = NP = r = MA$. La corde $OM = O'P$. Le triangle CO'P est isoscèle; et l'on a $OB \times O'P = 2Rr = R^2 - r^2$. (Les candidats se servant des mêmes lettres que dans l'énoncé, pourront employer plusieurs figures.) — (*Il n'y avait pas de figure sur le texte de la composition.*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Composition d'admissibilité.

1. — On donne une surface rapportée à un système de plans coordonnés rectangulaires :

$$3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2yz - 4zx + 8xy + 8x - 6y + 2z = 0.$$

Trouver l'équation de la même surface par rapport à un même système de plans principaux.

Opérer directement en supposant l'équation du plan diamétral connue.

2. — Démontrer que dans une équation à coefficients réels, qui a ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations du premier membre ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

On supposera connue la règle des signes de Descartes.

Composition d'admission:

Soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes, ξ et η les coordonnées d'un point M du plan de l'hyperbole. Par ce point M on mène deux tangentes à l'hyperbole la touchant en A et B. Trouver l'équation du cercle passant par A et B et le centre O de l'hyperbole.

Ce cercle rencontre l'hyperbole en C et D distincts de A et B. Trouver l'équation de la droite CD.

Si M décrit une ligne droite, aux diverses positions du point M correspondent diverses positions de CD. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites.

MÉLANGES

DU ROLE DE L'EXPÉRIENCE

DANS LES SCIENCES EXACTES

par M. **J. Hoüel**, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux.

(Voir page 118.)

Cette Géométrie *générale* peut être développée jusqu'au bout, sans que rien n'oblige à déterminer d'une manière quelconque un certain paramètre arbitraire, qui entre dans la plupart des relations métriques. Elle est absolument vraie indépendamment de cette détermination, et si l'expérience venait à nous offrir un espace où les relations métriques fondamentales fussent vérifiées par une valeur de ce paramètre autre que zéro, toutes les déductions obtenues seraient vérifiées par cette espace. C'est ainsi que M. Beltrami a constaté que la Géométrie plane de Lobatchefsky et de Bolyai trouvait sa réalisation complète dans les surfaces à courbure constante négative.

Mais, pour obtenir avec l'expérience un accord aussi complet que possible, on est amené à choisir, parmi toutes les valeurs que peut prendre le paramètre en question (1), la

(1) Ce paramètre pourrait recevoir non-seulement des valeurs négatives qui répondraient à la Géométrie de Lobatchefsky ou Géométrie *hyperbolique* (Voir *Klein*, Math. Annalen, t. VI, p. 112), comme on l'a nommé dans ces dernier temps, mais encore des valeurs positives, comme dans la Géométrie *elliptique*, où les lignes de plus courte distance peuvent se rencontrer en plus d'un point.

valeur zéro, qui se trouve en même temps correspondre au cas le plus simple et le plus facile à traiter. On obtient de cette manière la Géométrie *euclidienne* ou Géométrie ordinaire. Ce choix du paramètre répond, sous sa forme élémentaire, à l'hypothèse d'une direction unique pour le parallélisme.

Jusqu'à quel point ce choix était-il imposé par l'expérience? C'est ce qu'on n'avait jamais su avec précision avant les dernières recherches de Legendre et de Lobatchefsky. On savait déjà que les observations les plus précises n'avaient indiqué jusque-là aucun désaccord avec la Géométrie euclidienne. Mais ce sont ces deux géomètres qui ont démontré les premiers que, si l'accord a lieu pour des figures de grandes dimensions, il a lieu à plus forte raison pour des figures de dimensions moindres, et leurs conclusions ont donné à la vérification expérimentale de l'hypothèse euclidienne une valeur et une portée incomparablement supérieures à ce que l'on peut obtenir d'analogue pour les autres sciences physiques.

Ce n'est pas ainsi, on le sait, que l'expérience a parlé aux premiers inventeurs de la Géométrie, qui, ainsi que le font encore bien des modernes, ont confondu les données expérimentales avec celles de la raison pure. L'hypothèse euclidienne a été admise au nom de ce qu'on appelle *l'évidence*, c'est-à-dire d'un troisième moyen de connaître l'intermédiaire entre l'expérience et le raisonnement, et participant à la fécondité de l'une et à la certitude de l'autre. Pour nous *l'évidence* n'est autre chose qu'une expérience si souvent répétée que la force de l'habitude nous en a fait perdre la conscience, et dont les résultats, conservés par la mémoire, nous dispensent de la reproduire matériellement chaque fois que nous voulons y recourir. Il nous est impossible d'admettre cette entité, si commode à invoquer quand les raisons solides font défaut.

On a remarqué, en jugeant soit d'après une construction géométrique, soit d'après les indications d'un œil exercé, que si l'on fait tourner tant soit peu une parallèle à une droite autour d'un de ses points, on obtenait une rencontre

des deux droites. Cela a suffi pour faire introduire ce fait parmi les principes, et on l'y a maintenu, parce que toutes ses conséquences se sont trouvées conformes aux expériences les plus variées de la vie de chaque jour, aussi bien qu'aux mesures scientifiques les plus précises.

Il nous paraît donc bien établi que la Géométrie, comme la Mécanique, l'Optique, la théorie de la Chaleur ou celle de l'Électricité, se compose : 1° d'une partie *physique*, plus restreinte, à la vérité, que dans les autres sciences, mais à laquelle sont dues les hypothèses fondamentales relatives aux propriétés de l'espace, et qui comprend aussi les applications de cette science à l'étude de la nature : l'Astronomie pratique, la Géodésie, la Topographie, etc.; 2° d'une partie *théorie et abstraite*, qui met en œuvre les hypothèses, quelles qu'elles soient, fournies par la partie physique, et qui seule a droit au titre de *science exacte*. C'est à cette dernière partie seule qu'appartient la *certitude mathématique*, laquelle ne porte que sur l'accord des hypothèses avec leurs conséquences, et nullement sur la valeur des hypothèses elles-mêmes. Le contrôle des hypothèses appartient exclusivement à la partie physique, qui, après les avoir suggérées à la science abstraite, a encore à apprécier leur exactitude soit directement, soit d'après leurs conséquences.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 7.

Solution par M. Biette, élève du Lycée du Havre.

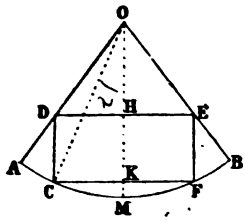
On donne un secteur circulaire dont l'angle au centre est 2α, et l'on demande d'inscrire dans ce secteur, en plaçant deux sommets sur l'arc, un rectangle dont la surface soit maxima.

Soit COM $= x$ et S la surface du rectangle, on a :

$$S = CF \,.\, CD.$$

Dans le triangle COK, on a :

$$DK = OC \sin x = R \sin x$$



donc : $CF = 2R \sin x$

Dans le triangle CDO, on a :

$$\frac{CD}{\sin COD} = \frac{OD}{\sin DCO} \qquad (1)$$

or :

$$COD = \alpha - x, \; DCO = x;$$

$$OD = \frac{R \sin x}{\sin \alpha};$$

en portant ces valeurs dans (1) on a :

$$CD = \frac{R \sin (\alpha - x)}{\sin \alpha}$$

donc : $$S = \frac{2R^2 \sin x \sin (\alpha - x)}{\sin \alpha}$$

or : $$2 \sin x \sin (\alpha - x) = \cos (2x - \alpha) - \cos \alpha$$

par suite : $$S = \frac{R^2}{\sin \alpha} \left[\cos (2x - \alpha) - \cos \alpha\right].$$

S sera le maximum en même temps que $\cos (2x - \alpha)$.

La plus grande valeur que puisse prendre $\cos (2x - \alpha)$ est 1, on a donc au maximum

$$\cos (2x - \alpha) = 1$$

par suite $$2x - \alpha = 0$$

d'où : $$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lorain, de Semur; Richard, de Chartres; Simon, d'Avignon.

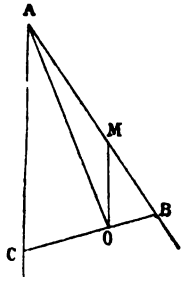
QUESTION 19.

Solution par M. Jullidière, élève au Lycée de Mont-de-Marsan.

Un point fixe O *est donné dans un angle plan* A. *Par* O, *on mène une transversale rencontrant les côtés de l'angle en* B *et en* C. S *et* S' *sont les aires des triangles* OAB, OAC : *démontrer que la somme* $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$ *est constante quelle que soit la manière dont on mène les transversales.*

Par le point O, menons OM parallèle à CA : nous avons

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{OC} \qquad (1)$$



mais on voit facilement que $\frac{AB}{AM}$ représente le rapport des aires des deux triangles OAB, OAM et $\frac{BC}{OC}$ le rapport des aires de BAC et OAC. La proportion (1) peut donc s'écrire

$$\frac{\text{surf. OAB}}{\text{surf. OAM}} = \frac{\text{surf. BAC}}{\text{surf. OAC}}$$

ou

$$\frac{S}{\text{surf. OAM}} = \frac{S + S'}{S'}$$

ou

$$\frac{1}{\text{surf. OAM}} = \frac{S + S'}{SS'} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S'}$$

La surface OAM étant constante; il en est de même de

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S'}.$$

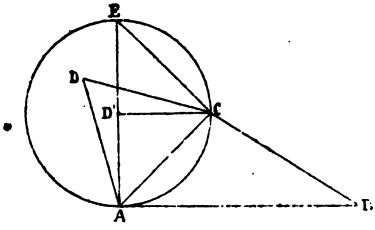
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Bozonet, petit séminaire de Belley; Platiau, Joire, au lycée de Saint-Omer; Biette, lycée du Havre; Aurenty, à Marseille; Maquaire, à La Flèche; Orth, à Liége; Florentin, à Bar-le-Duc; Mathieu, à Caen; Thual, à Lorient.

QUESTION 22.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

On donne deux points fixes A *et* B.

Déterminer le lieu géométrique d'un point variable C *tel que la surface du triangle* ACB *soit équivalent à celle d'un triangle* ACD *construit sur* AC *comme base.*



Soient C un point du lieu

$$AC = x \text{ et } AB = b$$

on doit avoir

$$\frac{1}{2} bx \sin A = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$$

ou

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{2b\sqrt{3}}{3}$$

Le rapport $\frac{x}{\sin A}$ étant constant, il est facile de voir que x sera maximum quand $\sin A = 1$, c'est-à-dire quand $A = 90°$. Alors

$$x = \frac{2b\sqrt{3}}{3}.$$

Au point A élevons une perpendiculaire AE égale à $\frac{2b\sqrt{3}}{3}$; le point E est un point du lieu. Si sur cette droite comme diamètre, nous décrivons une circonférence, nous aurons le lieu demandé. En effet, soit C un point du lieu, le triangle AEC étant rectangle on a

$$\overline{AC}^2 = \frac{2b\sqrt{3}}{3} . AD'$$

or $$AD' = AC \sin A.$$

donc $$\overline{AC}^2 = \frac{2b\sqrt{3}}{3} \times AC \sin A.$$

ou $$\frac{AC}{\sin A} = \frac{2b\sqrt{3}}{3}. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

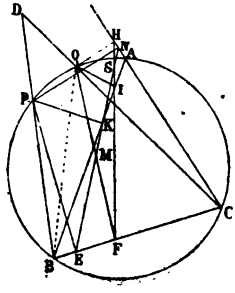
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Biette, lycée du Havre; Ernst, à Périgueux; Nigri et Comandré, à Pau; Cuinet, à Bourg.

QUESTION 24.

Solution par M. Perrin, élève au Lycée de Clermont-Ferrand.

Un cercle étant circonscrit à un triangle ABC, *par un point* D *du plan on mène les lignes* DB, DC *coupant le cercle en* P *et* Q. *Les droites qui passent par les pieds des perpendiculaires abaissées de* P *et* Q *sur les côtés du triangle se coupent en* S *sous un angle égal à la différence des angles* A *et* D.

Soient QH, QI, QF, PN, PK, PE les perpendiculaires abaissées des points P et Q sur les trois côtés du triangle. On sait que les trois points H, I, F sont en ligne droite, ainsi que les trois points N, K, E.



Soit S l'intersection des droites HIF, NKE. Je dis que ESF = BAC — BDC.

En effet $\widehat{BAC}$ a pour mesure $\frac{BC}{2}$; $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{BC - PQ}{2}$ donc

$\widehat{BAC} - \widehat{BDC}$ aura pour mesure $\frac{PQ}{2}$. L'angle EMF extérieur au triangle MSF est égal à $\widehat{MSF} + \widehat{MFS}$. Le quadrilatère FQHC étant inscriptible

$$\widehat{QFH} = \widehat{QCA} + \widehat{QBA}$$

Les angles EMF, PEM sont égaux comme alternes-internes.

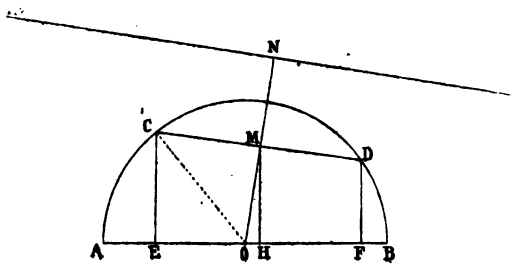
Or, le quadrilatère PKEB étant inscriptible, $\widehat{PEM} = \widehat{PBK}$ et par suite $\widehat{PBK} = \widehat{QBA} + \widehat{MSF}$.

Il faut donc que $\widehat{MSF} = \widehat{PBQ}$, c'est-à-dire soit mesuré par $\frac{PQ}{2}$ et soit égal à la différence des angles A et D; c.q.f.d.

QUESTION 25.

Solution par M. Picaud, élève du Cours des mineurs, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

Mener une ligne droite parallèle à une droite donnée et coupant un demi-cercle de telle manière que le trapèze formé par la corde, le diamètre et les ordonnées des extrémités de la corde, soit maximum.



Supposons le problème résolu et soit CD la parallèle à xy qui détermine avec les deux ordonnées CE et DF le trapèze maximum CDEF. Soit α l'angle constant de xy ou CD avec le diamètre AB. Cet angle est égal à l'angle OMH.

Du centre O j'abaisse la perpendiculaire OM que je représente par x et du point M la perpendiculaire MH sur le diamètre. MH étant la base moyenne du trapèze, sa surface sera EF . MH. Mais MH $= x \cos \alpha$, EF $=$ CD $\cos \alpha$. D'ailleurs le triangle rectangle COM donne :

$$CM = \frac{CD}{2} = \sqrt{R^2 - x^2}$$

par suite $\quad EF = 2 \cos \alpha \sqrt{R^2 - x^2}$

et l'expression de la surface deviendra

$$2x \cos^2 \alpha \sqrt{R^2 - x^2}$$

Cette expression sera maximum en même temps que $x\sqrt{R^2 - x^2}$ ou son carré $x^2(R^2 - x^2)$.

On devra avoir $x^2 = R^2 - x^2$.

d'où $$x = \frac{R}{2}\sqrt{2}.$$

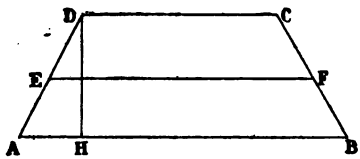
La corde correspondante est le côté du carré inscrit.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vautré ; Biette ; Brice, Maquaire, à La Flèche ; Cousin, de Caen ; Aubert, de Marseille.

QUESTION 28.

Solution par M. Vautré, élève au Grand Séminaire de Saint-Dié.

Dans un trapèze isoscèle, on connaît le périmètre 4p, *la surface* a^2, *et la surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze tournant autour de la ligne qui joint les milieux des bases est égale à* πb^2. *Déterminer les côtés du trapèze.*



Nous allons déterminer le trapèze cherché ABCD par sa base moyenne $EF = x$, son côté $AD = y$ et leur angle $DEF = \alpha$.

Menons la hauteur DH. On a

$$AB + CD + 2AD = 4p$$

ou en divisant par 2 :

$$x + y = 2p \qquad (1)$$

D'ailleurs $\quad EF \,.\, DH = a^2$

ou $$xy \sin \alpha = a^2 \qquad (2)$$

Enfin $$\frac{1}{2}\pi\,(AB + CD)\,AD = \pi b^2$$

ou $$xy = b^2 \qquad (3)$$

de (1) et (3) on tire

$$x = p \pm \sqrt{p^2 - b^2}$$
$$y = p \pm \sqrt{p^2 - b^2}$$

puis en substituant ces valeurs dans (2), il vient

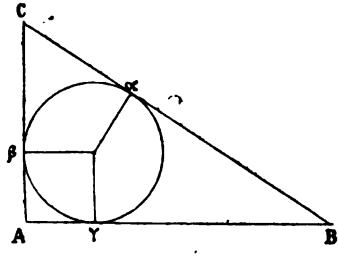
$$\sin \alpha = \frac{a^2}{b^2}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Belin, de Semur; Canon, de Liége; Landouzy, du lycée de Lille; Lecoq, de l'athénée de Liége; Biette, du Havre; Lynch et Woestyn, de Paris; Clabé, de Mont-de-Marsan; de Gueldre, Rigot et Nénon, de Dinant.

QUESTION 29.

Solution par M. Vautré, élève du Grand Séminaire de Saint-Dié.

Calculer les trois côtés et la surface d'un triangle rectangle, connaissant le rayon r *du cercle inscrit et sachant que le point de contact du cercle divise l'hypoténuse dans le rapport de* m *à* n.



Posons

$$AB = x;\ Ac = y,$$

d'où

$$\alpha B = B\gamma = x - r,$$

et

$$\alpha C = \beta C = y - r.$$

Nous aurons d'après la Question 2

$$\text{Aire } ABc = \frac{1}{2} AB \,.\, AC.$$

Donc $$2(x - r)(y - r) = xy$$

ou $$2rx + 2ry - ny - 2r^2 = 0 \qquad (1)$$

et comme $$y = \frac{nx}{m} \qquad (2)$$

il vient, en portant cette valeur dans (1) et ordonnant

$$nx^2 - 2r(m + n)x + 2mr^2 = 0.$$

d'où $$x = \frac{r(m + n) \pm \sqrt{m^2 + n^2}}{n}$$

et par suite $$y = \frac{r(m + n) \pm \sqrt{m^2 + n^2}}{m}$$

Connaissant AC et AB, on aura facilement la surface.

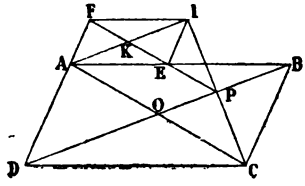
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Maggi, de Fribourg; Landouzy, du lycée de Lille; Belin, de Semur; Canon, de l'athénée de Liége; Granger, du lycée de Périgueux; Biette, du Havre; Lynch et Woestyn, de Paris; Meurant, Nénon, à Dinant; Florentin, à Bar-le-Duc; Aurenty, à Marseille; Bolandard, à Lons-le-Saulnier.

QUESTION 32.

Solution par MM. Lynch et Woestyn de Paris.

Dans un parallélogramme ABCD, *on prend un point* P *sur la diagonale* BD ; *on mène la ligne* CP *que l'on prolonge d'une longueur* PI *égale à* CP ; *par le point* I *on mène* IE *parallèle à* AD, *et rencontrant* AB *en* E *et* FI *parallèle à* AB *et rencontrant* AD *en* F. *Prouver que les points* F, E, P *sont en ligne droite.*

Joignons AI, AC, KP, FE. Dans le triangle AIC, OP joignant les milieux des côtés AC et IC est parallèle à AI. Les deux triangles AFI et ADB ayant leurs trois côtés parallèles ont aussi leurs médianes AO et FK parallèles. Donc FE est parallèle à AC. Dans le triangle AIC, KP joignant les milieux des côtés AI et IC est parallèle à AC. Les deux droites FE et KP étant parallèle à AC et se rencontrant en K se confondent. Donc les trois points F, E, P sont sur une même droite.



Nota.— Ont résolu la même question : MM. Lorain, de Semur ; Landouzy, de Lille ; Béringuier, du lycée de Montauban ; Dessirier, de Dijon ; Mahieux, de Saint-Quentin ; Herouard, de Sainte-Barbe ; Laperrine d'Hautpoul, de Perpignan ; Chossegros, au Puy ; Bernard, à Liége ; Giros, à Nancy ; Bourgeois, à Saint-Etienne.

QUESTION 34.

Solution par M. Joire, élève du Lycée de Saint-Omer.

On donne un cercle et un diamètre AB. *Trouver le lieu des points* M *tels que la surface du triangle* AMB *soit égale à celle du carré construit sur la tangente* MT, *menée de* M *au cercle.*

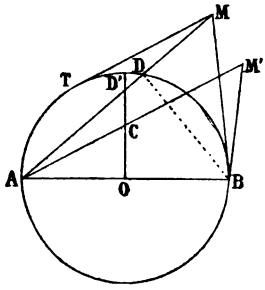
Joignons BD, M étant un point du lieu, on a

$$\overline{MT}^2 = \frac{MA \,.\, BD}{2}$$

mais on a aussi $\qquad MT^2 = MA \,.\, MD$

donc $$\frac{MA \cdot BD}{2} = MA \cdot MD$$

d'où $$BD = 2MD$$



Le triangle rectangle BMD est par suite toujours semblable à lui-même, l'un des côtés étant toujours double de l'autre. Donc l'angle DMB est constant et le lieu est un segment de cercle décrit sur AB comme corde et capable de l'angle M.

On peut finalement trouver le centre de cette circonférence. Considérons un point du lieu sur la tangente en B, en M_1. On a $$\overline{BM_1}^2 = 2R \cdot \frac{R}{2} = R^2$$

donc $BM_1 = R$. Le centre se trouve donc sur OD, perpendiculaire sur AB en son milieu; le rayon est AC; on a

$$\overline{AC}^2 = 7^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5R^2}{4}$$

d'où $$AC = \frac{R}{2}\sqrt{5}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Mahieux, de Saint-Quentin; Lynch et Woestyn, de Paris; Vidnau, de Bordeaux; Lorain, de Semur; Comandré, de Pau; Tallavignes, de Sainte-Barbe; Biette, du Havre; Lecoq, de Liége; Bellamy, de Saint-Brieuc; Neveu, à Charleville; Estienne, à Bar-le-Duc.

QUESTIONS PROPOSÉES

45. — Si l'on pose

$$S_{2p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2p},$$

on a l'identité

$$S_{2p} = (2p + 1)$$
$$\left(\frac{1}{1 \cdot 2p} + \frac{1}{2(2p-1)} + \frac{1}{3(2p-2)} + \ldots\ldots \frac{1}{p(p+1)}\right)$$

(de Longchamps.)

46. — Si l'on pose

$$e_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

on a $$ne_n = (n + 1)\, e_{n-1} - e_{n-2},$$

(*de Longchamps.*)

47. — Les perpendiculaires menées aux milieux des bissectrices des angles d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points qui sont en ligne droite.

(*de Longchamps.*)

48. — Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur plus petit commun multiple.

(*Man. gén. de l'Inst. prim.*)

49. — On fait tourner un angle droit autour de son sommet A, fixe dans l'intérieur d'un cercle. Les côtés rencontrent la circonférence en B et C. On construit le rectangle ayant pour côtés AB et AC. Trouver le lieu géométrique du quatrième sommet.

50. — Étant donné un triangle ABC, si l'on prend sur ses côtés trois points quelconques A'B'C' et les symétriques A''B''C'' de ces points par rapport aux milieux des côtés du triangle; les deux triangles A'B'C', A''B''C'' sont équivalents. (*de Longchamps.*)

51. — Soit ABC un triangle rectangle, AD la hauteur; mener par le pied D des droites DE, DF également inclinées sur cette hauteur, de façon que le triangle EDF soit maximum.

(*Ex. oraux de Saint-Cyr à Poitiers, 1873. — d. L.*)

52. — Étant donnés deux plans parallèles P, Q, une perpendiculaire commune AB, et un point M sur cette droite, trouver un cône de révolution ayant pour sommet le point M, pour axe la droite MAB, et tel que le volume intercepté dans le cône par les deux plans parallèles soit donné. — Discuter.

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 11096-7.

THÉORIE DE L'INVERSION

OU

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

par M. Coches.

La méthode d'*inversion* ou de *transformation par rayons vecteurs réciproques* a été proposée pour la première fois par M. Stubbs, comme méthode générale de déformation des figures (*Philosophical Magazine*, 1843). On trouve cependant des exemples particuliers de cette méthode de déformation dans les ouvrages les plus anciens, et concernant la théorie de la construction des cartes géographiques au moyen du système des projections stéréographiques.

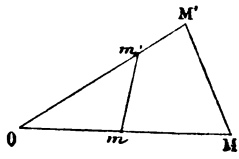
Depuis, M. Thomson l'a appliquée sous le nom de principe des images, et M. Liouville en a donné une théorie analytique complète (*Journal de Liouville*, 1re série, tome XII). Dans ces dernières années, elle s'est encore enrichie de nombreux et intéressants théorèmes, grâce aux recherches de MM. Casey, Cayley, Clebsch, Clifford, Cremona, Crofton, Hart, Hirst, Lie, Maxwell, Roberts et Sylvester, à l'étranger, et de MM. Darboux, de la Gournerie, Laguerre, Mannheim et Moutard pour la France.

La découverte inattendue d'un appareil dû à M. le colonel Peaucellier a appelé cette méthode à rendre les plus grands services à l'industrie. Cet appareil, formé de tiges rigides et articulées, sans glissières permet de résoudre d'une façon rigoureuse le problème de la transformation d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne et réciproquement, problème dont le *parallélogramme de Watt* ne donne qu'une solution approchée. Aussi nous pensons être utile à nos lecteurs en leur présentant une exposition élémentaire des principes fondamentaux de cette méthode qui

trouve encore son application en astronomie dans l'étude du phénomène des éclipses.

§ 1er.

Définitions. I. — On joint un point fixe O appelé *pôle* à un point variable M du plan ou de l'espace, et l'on prend sur la droite OM un point déterminé par la relation



$$OM \times Om = \mu,$$

dans laquelle μ désigne une constante.

Le point m est dit le point *réciproque* du point M, et inversement.

Si l'on considère un second point M' en dehors de la droite OM et son inverse m', on a encore

$$OM' \times Om' = \mu$$

et par suite $$OM \times Om = OM' \times Om'.$$

Si l'on joint MM', mm' les triangles OMM', $Om'm$ seront semblables. En effet, ils ont l'angle O commun, et les côtés qui comprennent cet angle sont proportionnels puisqu'on déduit de l'égalité précédente

$$\frac{OM}{Om'} = \frac{OM'}{Om};$$

les angles M'MO et mm'O sont donc égaux, par suite les droites mm', MM' sont anti-parallèles et le quadrilatère MM'mm' est inscriptible. On a par conséquent la proposition suivante :

Théorème 1. — *Deux couples de points réciproques sont situés sur une même circonférence.*

En appliquant la construction précédente à tous les points d'une figure, on obtient une seconde figure que l'on nomme l'*inverse* de la première ou sa *transformée par rayons vecteurs réciproques*.

La quantité constante μ est appelée le *module* de l'inversion ou de la *transformation*.

L'inversion est dite *positive* ou *négative* suivant que le module est lui-même positif ou négatif; dans le premier cas,

le pôle est d'un même côté par rapport aux deux points M et *m*; dans le second cas, il est compris entre ces deux points.

II. — Lorsque le point M décrit la droite OM passant par le pôle, le point *m* demeure sur cette droite; si le point M s'éloigne indéfiniment du pôle, le point *m* s'en rapproche indéfiniment, et inversement. Par conséquent : *l'inverse d'une droite passant par le pôle, coïncide avec cette droite elle-même.*

En général, on désigne sous le nom de *figure anallagmatique* toute figure qui coïncide avec son inverse dans la transformation par rayons vecteurs réciproques. Nous en donnerons plus loin un grand nombre d'exemples.

Il résulte des considérations précédentes que, lorsqu'une courbe a des branches infinies, la figure inverse possède un égal nombre de branches passant par le pôle, et réciproquement.

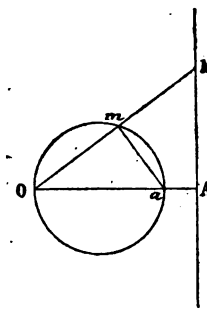
Nous devons encore observer que lorsque deux courbes se coupent en des points réels, les courbes inverses se coupent aussi, et leurs points d'intersection sont les inverses des points d'intersection des courbes données. Lorsque deux des points d'intersection de deux courbes se rapprochent indéfiniment, les courbes sont tangentes; il en est de même des courbes inverses qui se touchent en un point qui est le point réciproque du point de contact des courbes primitives.

III. — Nous venons de voir que l'inverse d'une droite passant par le pôle ne diffère pas de cette droite; mais il n'en est plus de même, lorsque la droite donnée ne passe pas par le pôle. L'inversion d'une droite quelconque s'obtient de la façon suivante :

Théorème 2. — *L'inverse d'une droite quelconque est une circonférence passant par le pôle.*

En effet, soit A le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la droite et *a* le point réciproque de A. Soit de plus M un point quelconque de la droite et *m* le point réciproque. Joignons *am;* nous avons vu (th. 1) que le qua-

drilatère AM*ma* est inscriptible; mais puisque l'angle A est droit, il en est de même de l'angle en *m*; par conséquent, le point *m* appartient à la circonférence décrite sur O*a* comme diamètre.



Ainsi l'inverse de la droite AM est la circonférence O*am* dont le diamètre O*a* est lié à la distance OA du pôle à la droite, par la relation

$$Oa \times OA = \mu.$$

Réciproquement, *l'inverse d'une circonférence passant par le pôle est une droite perpendiculaire au diamètre passant par le pôle.*

IV. — Si l'on fait tourner le plan de la figure 2 autour de OA comme diamètre, la droite AM engendre un plan perpendiculaire à OA, la circonférence O*am* engendre une sphère; il en résulte immédiatement les propositions suivantes :

L'inverse d'un plan quelconque est une sphère passant par le pôle.

L'inverse d'une sphère passant par le pôle est un plan perpendiculaire au diamètre passant par le pôle.

V. — Avant de passer à l'inversion de la circonférence et de la sphère placées en dehors du pôle, il est bon d'observer que les résultats obtenus précédemment sont indépendants de la grandeur du module de transformation; il en est toujours ainsi et l'on peut formuler la proposition fondamentale suivante :

Théorème 3. — *Pour un même pôle et pour des modules différents les figures inverses d'une figure donnée sont homothétiques; le centre d'homothétie coïncide avec le pôle et le rapport d'homothétie des deux figures inverses de la figure donnée est égal au quotient des modules d'inversion.*

En effet, soient *m* et *m'* les points réciproques d'un même point M d'une figure donnée pour des modules μ et μ'; on a

$$OM \times Om = \mu$$
$$OM \times Om' = \mu'$$

divisant membre à membre, il vient

$$\frac{Om}{Om'} = \frac{\mu}{\mu'}$$

donc m et m' forment deux figures homothétiques.

(*A suivre.*)

PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

par **Georges Dostor.** (*Suite*, voir page 167.)

---

15. *Expressions diverses du volume d'un polyèdre régulier convexe.* Soit N le nombre des faces du polyèdre. Chacune de ces faces sera la base d'une pyramide régulière ayant son sommet au centre O du polyèdre.

Le triangle ABC est l'un des n triangles dont se compose la face ayant son centre en C. La surface de cette face sera donc

$$n \times ABC = \frac{n}{2} AB \times CI = \frac{n}{2} a \cdot \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} na^2 \cot \frac{\pi}{n}$$

et, comme la hauteur OC est égale à r, le volume de notre pyramide régulière sera

$$= \frac{1}{12} na^2 r \cot \frac{\pi}{n}$$

Nous avons donc

$$\text{(IX)} \qquad V = \frac{1}{12} Nna^2 r \cot \frac{\pi}{n}$$

pour le *volume du polyèdre convexe, de* N *faces ayant chacune* n *côtés, égaux à* a, *et se trouvant circonscrit à la sphère de rayon* r.

Dans cette expression remplaçons $a \cot \frac{\pi}{n}$ par sa valeur $2\rho \cos \alpha$ tirée de (VIII) : elle devient

$$\text{(X)} \qquad V = \frac{1}{6} N n a r \rho \cos \alpha.$$

Les égalités (VI) et (VIII) nous donnent

$$4r\rho \cos \alpha = a^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \alpha$$

de sorte qu'on a encore

$$\text{(XI)} \qquad V = \frac{1}{24} N n a^3 \cot^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \alpha$$

Dans cette dernière formule, mettons à la place de l'arête a successivement les valeurs

$$a = 2r \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cot \alpha = 2R \cot \frac{\pi}{m} \cot \alpha = 2\rho \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\cos \frac{\pi}{n}} \cot \alpha$$

tirées des relations (VI), (VII) et (VIII) : elle se changera dans les suivantes

$$\text{(XII)} \qquad \begin{cases} V = \frac{1}{3} N n r^3 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cot^2 \alpha, \\ V = \frac{1}{3} N n R^3 \cot^2 \frac{\pi}{n} \cot^3 \frac{\pi}{m} \cot^2 \alpha, \\ V = \frac{1}{6} N n \rho^3 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \sin 2\alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

Enfin nous pouvons exprimer V exclusivement en valeur de R, r et ρ.

En effet, puisque les triangles rectangles OAI et OCI donnent $a = AB = 2\sqrt{R^2 - \rho^2}$, $CI = \sqrt{\rho^2 - r^2}$, il viendra encore

$$\text{(XIII)} \qquad V = \frac{1}{3} N n r \sqrt{(R^2 - \rho^2)(\rho^2 - r^2)}.$$

16. Appliquons ces formules aux cinq polyèdres réguliers convexes ; nous obtenons pour leurs volumes les expressions suivantes :

Tétraèdre : $V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} \qquad = 8r^3 \sqrt{3}$

$\qquad = \frac{8}{3} \rho^3 \qquad = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}$

Hexaèdre : $V = a^3 \qquad = 8r^3$

$= 2\rho^3 \sqrt{2} \qquad = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3}$

Octaèdre : $V = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2} \qquad = 4r^3 \sqrt{3}$

$= \frac{8}{3} \rho^3 \sqrt{2} \qquad = \frac{4}{3} R^3$

Dodécaèdre : $V = \frac{1}{96} a \sqrt{15}(1 + \sqrt{5})^4 \quad = \frac{10}{3} \sqrt{390 - 174\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{3} \rho^3 \sqrt{15}(\sqrt{5} - 1)^2 = \frac{1}{3} R^3 \sqrt{3}(10 + 2\sqrt{5})$

Icosaèdre : $V = \frac{5}{24} a^3 (1 + \sqrt{5})^2 \quad = \frac{5}{32} r^3 \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1)^4$

$= \frac{5}{12} \rho^3 (\sqrt{5} - 1) \quad = \frac{2}{3} R^3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$

17. Supposons que l'hexaèdre régulier et l'octaèdre régulier soient inscrits dans la même sphère; leurs volumes seront entre eux comme les quantités $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ et $\frac{4}{3}$ ou comme 2 et $\sqrt{3}$; or nous savons (n° 9) que les rayons des sphères tangentes aux arêtes de ces deux polyèdres réguliers sont dans le même rapport. Donc :

Lorsque l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes de ces deux polyèdres.

Si le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers sont aussi inscrits dans la même sphère, le rapport de leurs volumes sera égal à

$$\frac{10 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}.$$

ou au rapport des rayons des sphères tangentes aux arêtes (n° 9). Donc

Lorsque le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes de ces deux polyèdres.

ÉTUDES SUR LES MAXIMA ET MINIMA

par M. Cochez *(Suite)*.

(Voir p. 74.)

La méthode exposée dans l'article précédent repose, comme nous l'avons fait voir, sur l'emploi de quantités infiniment petites, que Fermat suppose nulles au moment où la variable acquiert sa valeur maxima ou minima.

Dans un grand nombre de cas, en mathématiques élémentaires, cette manière de procéder ne peut s'appliquer, la théorie des infiniment petits et des limites étant du domaine des cours de Mathématiques spéciales. C'est ce qui nous a fait rechercher un principe, rentrant dans celui de Fermat et indépendant de la théorie des infiniment petits; mais avant de l'appliquer, il sera bon de s'assurer s'il doit y avoir maximum ou minimum.

Dans les applications réelles, du genre de celles données ici, il est toujours facile de reconnaître à priori s'il y aura maximum ou minimum; le raisonnement suffit. C'est pour cela qu'il n'y a pas de *criterium* à formuler dans ce sens.

PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Si une quantité* x *répond à une valeur maxima ou minima d'une certaine fonction, une valeur* x_1 *infiniment voisine de* x *répondra également au maximum ou au minimum.*

A ce principe nous joindrons les suivants :

1er PRINCIPE. — *Si* x *est maximum ou minimum,* ax *et* $\frac{x}{a}$ *sont aussi maximum ou minimum.*

Dans les applications on pourra supprimer les facteurs constants positifs multipliant ou divisant x.

2e PRINCIPE. — *Si* x *est maximum ou minimum,* x^m *est encore maximum, si* m *est positif; mais, si* x *est maximum,* x^{-m} *est minimum; et si* x *est minimum,* x^{-m} *est maximum.*

Donc dans les applications on peut supprimer un exposant constant.

3e PRINCIPE. — *Si* x *est maximum ou minimum, log* x *est*

maximum ou minimum, si la base des logarithmes est plus grande que l'unité.

Donc, lorsqu'une fonction consiste en un produit ou un quotient de puissances ou de racines, on peut employer les logarithmes.

APPLICATIONS DE CES PRINCIPES.

Questions de Géométrie.

PROBLÈME 1er. — *De quel point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle faut-il abaisser des perpendiculaires sur les côtés, pour que, par la révolution du triangle autour d'un des côtés* AC, *le rectangle* EDFC *engendre un cylindre de volume maximum?*

Dans cette question nous avons évidemment un maximum, le rectangle variant de zéro à zéro à mesure que le point E se déplace sur l'hypoténuse (*fig. page 77*).

Posons ED $= x$, EF $= y$, AC $= b$, CB $= a$.

Le volume du cylindre engendré par la révolution du rectangle EDFC autour de AC a pour expression $\pi x^2 y$.

A cause des triangles semblables BEF, BCA, on a

$$\frac{y}{a - x} = \frac{b}{a}$$

d'où
$$y = \frac{b}{a}(a - x);$$

et l'expression du volume devient :

$$\pi \cdot \frac{b}{a} x^2(a - x). \quad (1)$$

Pour une position E′ infiniment voisine de E, on obtiendrait un rectangle différant infiniment peu du premier et par suite un cylindre de volume

$$\pi \frac{b}{a} x_1^2 (a - x_1) \quad (2)$$

différant infiniment peu du cylindre (1).

Ces expressions (1) et (2) différeront d'autant moins que E′ sera plus voisin de E ; dans le cas du maximum on aura

$$x^2(a - x) = x_1^2 (a - x_1)$$

ou
$$x_1^3 - x^3 = a (x_1^2 - x^2)$$

divisant par $x_1 - x$, il vient

$$x_1^2 + xx_1 + x^2 = a(x_1 + x) \quad (3)$$

Dans le cas du maximum E′ se confond avec E, alors $x = x_1$ et la relation (3) donne

$$3x^2 = 2ax \text{ ou } x(3x - 2a) = 0.$$

La racine $x = 0$ donnerait un cylindre nul ; cette solution doit donc être écartée, et l'on a

$$x = \frac{2a}{3}$$

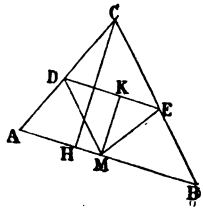
par suite

$$y = \frac{b}{3}$$

Le point cherché E s'obtiendra en prenant $CD = \frac{b}{3}$ et en menant par le point D une parallèle à BC. Le point E où cette parallèle rencontrera l'hypoténuse sera le point cherché.

Problème II. — *Étant donné un point* M *sur la base* AB *d'un triangle* ABC, *à quelle distance de cette base faut-il mener une parallèle* AB, *rencontrant les côtés* AC, CB *en* D *et* E *pour que le triangle* DEM *ait une surface maxima?*

Dans cette question il y aura un maximum, la surface du triangle DEM variant de zéro à zéro.



Posons $AB = b$ $HC = h$

$DE = y$

$MK = x.$

La quantité à rendre maximum est

$$\frac{xy}{2} \quad (1).$$

Or

$$bh = bx + hy$$

d'où

$$y = b\,\frac{h - x}{h}$$

remplaçons y par cette valeur dans (1), on aura

$$\frac{b}{2h}\,x(h - x)$$

ou en supprimant le facteur constant $\frac{b}{2h}$ la quantité à rendre maximun sera

$$x(h - x) \qquad \text{(Principe 1)}$$

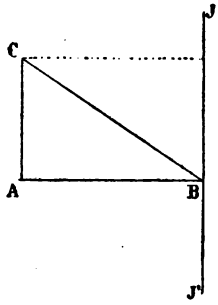
Appliquons le principe fondamental, nous aurons

$$x(h - x) = x_1(h - x_1)$$

ou $$h(x_1 - x) = x_1^2 - x^2$$
divisons par $x_1 - x$ et faisons dans le résultat $x_1 = x$, il vient $$x = \frac{h}{2}$$

Il faut donc mener la parallèle DE par le milieu de la hauteur CH pour avoir le triangle maximum.

Problème III. — *Un triangle rectangle* ABC *tourne autour d'un axe passant par un de ses sommets* B *et parallèle au côté* AC. *Calculer les trois côtés connaissant le périmètre* 2p *et sachant que le volume engendré est maximum.*



Soient $$BC = x$$ $$AC = y$$ $$AB = z$$
les côtés du triangle.

On a $$x + y + z = 2p \qquad (1)$$ $$y^2 + z^2 = x^2$$
et l'on sait que yz^2 est maximum.

Des relations (1) on tire
$$y = \frac{2p(p - z)}{2p - z}$$
multipliant cette relation par z^2 il vient
$$yz^2 = \frac{2pz^2(p - z)}{2p - z}$$
or $$\frac{2pz^2(p-z)}{2p-z} \qquad (2)$$
est maximum, z est la variable; on doit donc avoir :
$$\frac{z^2(p - z)}{2p - z} = \frac{z_1^2(p - z_1)}{2p - z_1}$$
effectuant, divisant par $z - z_1$ et faisant $z_1 = z$, il vient :
$$z(2z^2 - 7pz + 4p^2) = 0$$
d'où : $$z = 0$$
ou $$2z^2 - 7pz + 4p^2 = 0 \qquad (3)$$

La valeur $z = 0$ ne saurait convenir à la question; l'équation (3) donne :
$$z = \frac{p}{4}\left(7 - \sqrt{17}\right)$$
telle est la valeur de z qui rend maximum le produit (2), ou le volume engendré.

Portant cette valeur de z dans les équations (1) on trouve :

$$x = \frac{2p}{4}\left(-3 + \sqrt{17}\right)$$

$$y = \frac{p}{2}\left(5 - \sqrt{17}\right)$$

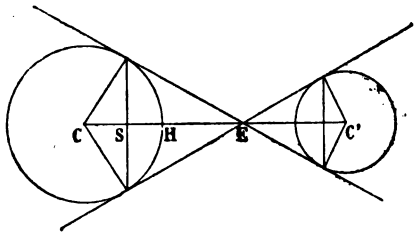
alors, le volume maximum est

$$yz^2 = \frac{p^3}{4}\left(71 - 17\sqrt{17}\right)$$

Problème IV. — *Sur la ligne qui joint les centres de deux sphères extérieures l'une à l'autre, trouver un point tel, que la somme des zones vues de ce point soit la plus grande possible.*

(Frenet.)

Soient C, C′ les centres des deux sphères dont les rayons sont respectivement r et r' ; d la distance de leurs centres, E le point cherché, et $CE = x$.



L'aire de la zone, vue du point E sur la sphère C, est $2\pi r HS$; or $HS = r - \frac{r^2}{x}$, donc, cette surface est

$$2\pi r\left(r - \frac{r^2}{x}\right)$$

De même l'aire de la zone située sur C′ et vue de E sera

$$2\pi r'\left[r' - \frac{r'^2}{d - x}\right]$$

il s'agit donc de rendre maximum la fonction

$$r\left[r - \frac{r^2}{x}\right] + r'\left[r' - \frac{r'^2}{d - x}\right].$$

Appliquant le principe fondamental, on a

$$r\left[r - \frac{r^2}{x}\right] + r'\left[r' - \frac{r'^2}{d - x}\right] = r\left[r - \frac{r^2}{x_1}\right] + r'\left[r' - \frac{r'^2}{d - x_1}\right]$$

ou après simplications

$$r^3\left[\frac{x_1 - x}{xx_1}\right] - r'^3\left[\frac{x_1 - x}{(d - x)(d - x_1)}\right] = 0$$

Divisons par $x_1 - x$, faisons $x_1 = x$, il vient

$$\frac{r^3}{x^2} = \frac{r'^3}{(d-x)^2}$$

d'où l'on tire $\quad x = d\,\dfrac{r^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} + r'^{\frac{3}{2}}}.$

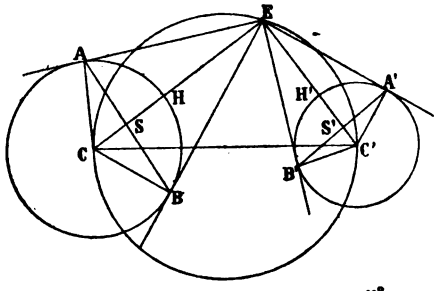
Problème V. — *Les centres de deux sphères sont situés aux extrémités d'une droite* CC′ = 2d.

Sur CC′ *comme diamètre on décrit une circonférence. Déterminer sur cette circonférence le point d'où l'on voit la plus grande portion des deux sphères.* (Haddon.)

Soit E le point qui répond à la question.

Posons $\quad CE = x \qquad CH = r$

$\qquad\qquad C'E = y \qquad C'H' = r'$



Par le point E menons les tangentes aux deux sphères, nous obtiendrons les segments visibles AHBS, A′H′B′S′.

Le segment AHBS a pour mesure

$$2\pi r HS;$$

$$\text{or } HS = r - \frac{r^2}{x}; \text{ donc}$$

$$\text{Surface AHBS} = 2\pi r\left[r - \frac{r^2}{x}\right]$$

On aurait de même

$$\text{Surface A'H'B'S'} = 2\pi r'\left[r' - \frac{r'^2}{y}\right]$$

et l'expression à rendre maximum est

$$(1) \quad r\left[r - \frac{r^2}{x}\right] + r'\left[r' - \frac{r'^2}{y}\right]$$

avec $\qquad x^2 + y^2 = 4d^2$

de cette relation on tire

$$y = \sqrt{4d^2 - x^2}$$

Portant cette valeur dans (1), on a à rendre maximum la fonction

$$r^2 + r'^2 - \frac{r^3}{x} - \frac{r'^3}{\sqrt{4d^2 - x^2}}.$$

En appliquant le principe énoncé, on a après simplifications

$$r^3\left[\frac{x_1 - x}{xx_1}\right] = \frac{r'^3}{\sqrt{4d^2 - x_1^2}\,\sqrt{4d^2 - x^2}}\left[\sqrt{4d^2 - x^2} - \sqrt{4d^2 - x_1^2}\right].$$

or

$$\sqrt{4d^2 - x^2} - \sqrt{4d^2 - x_1^2} = \frac{(4d^2 - x^2) - (4d^2 - x_1^2)}{\sqrt{4d^2 - x^2} + \sqrt{4d^2 - x_1^2}}$$

on a donc

$$r^3\frac{x_1 - x}{xx_1} = \frac{r'^3}{\sqrt{4d^2 - x_1^2}\sqrt{4d^2 - x^2}}\left[\frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{4d^2 - x^2} + \sqrt{4d^2 - x_1^2}}\right]$$

Divisons par $x_1 - x$, faisons $x_1 = x$, il vient

$$\frac{r^3}{r'^3} = \frac{x^3}{(4d^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

d'où

$$x = \frac{2dr}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

$$y = \frac{2dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

(A suivre.)

ÉCOLE CENTRALE

—

CONCOURS DE 1877. — 1re SESSION.

Géométrie analytique.

On donne un triangle AOB, rectangle en O, et on considère toutes les hyperboles qui passent aux points A et B, et ont leurs asymptotes parallèles aux côtés OA, OB.

1° Former l'équation générale de ces hyperboles;

2° Former l'équation du lieu des sommets de ces hyperboles et construire ce lieu;

3° Prenant un point P sur le lieu trouvé, construire celle des hyperboles

considérées qui a un sommet en P, et reconnaître sur quelle partie du lieu doit être ce point P, pour que A et B appartiennent soit à une même branche, soit aux deux branches de cette hyperbole.

Trigonométrie.

On donne deux côtés a et b d'un triangle et l'angle C compris, savoir :

$$a = 3676^m,351$$
$$b = 2154^m,742$$
$$C = 103° 46' 27''.$$

On demande de trouver le côté c, les angles A et B, ainsi que la surface du triangle.

Épure.

On donne : 1° Un cylindre ayant pour base un cercle C situé dans le plan horizontal de projection, et dont les génératrices sont parallèles à la droite de front bg, $b'g'$. $CS = 0^m,025$

$$C_1S = 0^m,055.$$

2° Un cône dont la base est un cercle C_1, situé dans le plan horizontal et dont le sommet est en s, s' sur la génératrice bg, $b'g'$ du cylindre. Le cercle de base du cône est tangent en s à la base du cylindre.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du cône et du cylindre.

2° De représenter le cylindre supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions nécessaires pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.

Titre intérieur : Cylindre et cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,21$ du petit côté inférieur.

Physique et Chimie.

I. — Un tube recourbé ABCD, dont les deux branches sont verticales et de même diamètre, renferme une certaine quantité de mercure et, au-dessus de ce mercure, dans la branche AB, qui est fermée, se trouve de l'air sec, sous la pression atmosphérique de $0^m,76$. La portion AB qui contient cet air a une longueur de $0^m,26$. On verse dans l'autre branche DC une colonne d'eau dont le poids est de $342^{gr},72$. Quelle est alors la différence de niveau des deux surfaces de mercure?

La section du tube est de 5 centimètres carrés et la densité du mercure est égale à 13,6.

II. — 1° Préparation du chlore.

2° Quel est à 0° et sous la pression de $0^m,76$, le volume de chlore que l'on peut retirer de 750 kilog. de sel marin?

$$\text{Équivalents} \begin{cases} Cl = 35,43 \\ Na = 23 \end{cases}$$

Densité du chlore $\delta = 2,44$.

Poids d'un litre d'air $1^{gr},293$, à 0° et sous la pression de $0^m,76$.

ÉCOLE FORESTIÈRE

Concours de 1877.

Composition en mathématiques (3 h.).

Les trois côtés d'un triangle ont respectivement des longueurs de 13 mètres, 14 mètres et 15 mètres. On demande de calculer à un millimètre près, la distance des côtés de ce triangle à ceux d'un autre triangle, qui aurait ses côtés parallèles à ceux du premier et tellement placé, que les distances de chacun de ses côtés à celui du premier qui lui est parallèle soient toutes égales entre elles; la surface du second étant d'ailleurs les trois quarts de celle du premier.

Note du rédacteur. — L'énoncé de cette question manque de clarté; le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC peut avoir quatre positions différentes. Il était nécessaire d'indiquer aux élèves que le problème était susceptible de plusieurs solutions, ou de leur dire nettement le cas à traiter.

Solutions :

$$x_1 = 2(2 - \sqrt{3}),\ x_2 = 10{,}5(2 - \sqrt{3},)\ x_3 = 4(2 - \sqrt{3}),$$
$$x_4 = 7(2 - \sqrt{3}).$$

Il suffit de calculer $\sqrt{3}$ à moins d'un demi-dix-millième.

Composition en trigonométrie et calcul logarithmique (3 h.).

Les trois angles d'un triangle sont entre eux respectivement comme les nombres $1, \frac{3}{7}, \frac{114}{469}$.

On demande de déterminer les rapports respectifs entre les longueurs des trois médianes.

Composition en narration française (3 h.).

Développer par le raisonnement et par des exemples cette pensée de Fénelon :

« L'ordre est la plus précieuse et la plus rare des qualités de l'esprit. »

Composition en thème allemand.

Charles XII est peut-être le seul de tous les hommes et jusqu'ici le seul de tous les rois, qui ait vécu sans faiblesse; il a porté toutes les vertus des héros à un excès où elles sont aussi dangereuses que les vices opposés.

Sa fermeté, devenue opiniâtre, fit ses malheurs dans l'Ukraine et le retint cinq ans en Turquie. Sa libéralité, dégénérant en profusion, a ruiné la Suède; son courage, poussé jusqu'à la témérité, a causé sa mort; sa justice a été quelquefois jusqu'à la cruauté; et, dans les dernières années, le maintien de son autorité approchait de la tyrannie. Ses grandes qualités dont une seule eût pu immortaliser un autre prince, ont fait le malheur de son pays. (VOLTAIRE.)

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Concours de 1877.

On donne un cercle O, de rayon R et deux points A et B situés sur un même diamètre, de part et d'autre du centre, à des distances OA = a, OB = b. On demande 1° de trouver sur la circonférence un point M tel que la somme des distances MA et MB soit un maximum.

2° De prouver que, dans le cas du maximum, les angles AMO, BMO sont égaux;

3° De chercher comment varie le maximum de MA + MB, lorsque les deux points A et B se déplacent sur le diamètre de manière que la distance $a + b$ des deux points reste constante. (*Mathématiques élémentaires.*)

1. — Un fil FABCF′, de longueur $2l$, est fixé par ses deux extrémités aux deux points F et F′, situés sur une même horizontale. Ce fil passe dans l'anneau A, puis sur une très-petite poulie de renvoi fixée au point B, sur l'horizontale FF′, et enfin dans un autre anneau C. A ces anneaux sont attachés par des cordons les poids Q et P. On donne BF = $2a$, BF′ = $2a'$, BC = l', et on propose de déterminer le rapport qui doit exister entre les poids P et Q pour qu'il y ait équilibre.

2. — L'expérience montre qu'un manœuvre travaillant 8 heures par jour effectue, par le poids de son corps, en une seconde de temps un travail égal à 9 kilogrammètres. Quelle quantité de pierre amènera-t-il en une journée de 8 heures et à l'aide d'un treuil à la surface d'une carrière dont la profondeur égale 24 mètres. Le poids de ce manœuvre étant égal à 60 kilogrammes, et sachant que le rapport du rayon de la grande roue au rayon du cylindre est égal à 25, à quel poids ferait-il équilibre par son propre poids?

3. — On connaît les projections horizontales de deux points A et B, situés dans un plan donné, construire les projections du triangle équilatéral construit sur la droite AB dans le plan donné.

(*Enseignement spécial, 3e année.*)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (PARIS)

Session de juillet.

1. — On demande de construire un trapèze connaissant les deux bases a et b et les côtés non parallèles c et d; à quelle condition le trapèze est-il possible?

Exprimer sa surface au moyen de a, b, c, d.

2. — Rendre calculable par logarithmes la somme sin A + cos B.

3. — On donne une sphère de rayon R, déterminer sur le diamètre AB de cette sphère la longueur AC de façon que, en menant par le point C le plan DCE perpendiculairement au diamètre, la somme de la surface de la zone dont la hauteur est AC et de la surface latérale du cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère et pour base le cercle DCE, soit égale à une surface donnée πm^2.

Discuter le problème.

4. — La hauteur AB d'un rectangle ABCD étant égale à 1 mètre, trouver une longueur DE moindre que DC telle que les volumes engendrés par le quadrilatère AECB tournant 1° autour de AD, 2° autour de BC, soient dans le rapport de 26 à 19.

5. — On donne une sphère de rayon R; sur le diamètre AB on prend une longueur AC $= x$ et l'on mène par le point C le plan DCE perpendiculaire au diamètre AB; exprimer au moyen de R et de x :

1° Le rapport du volume du segment ADCE à celui de la sphère qui aurait AG pour diamètre;

2° Le rapport du volume du segment BDCE à celui de la sphère qui aurait CB pour diamètre.

3° Déterminer x de façon que le premier rapport soit le triple du second.

6. — Trouver sur une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre un point C tel que, la figure tournant autour de AB, les volumes engendrés par les segments de cercle, dont les cordes sont AC et BC, soient entre eux dans un rapport donné.

7. — Un point matériel pesant est lancé dans le vide de bas en haut suivant la verticale avec une vitesse v; démontrer qu'il repassera au point de départ avec la vitesse initiale v.

8. — Déterminer les distances d'un point M à deux points A et B, connaissant la distance AB $= a$, la somme des distances MA + MB $= m$ et l'angle AMB sous lequel on voit du point M la droite AB.

9. — Énoncer la troisième loi de Kepler et s'en servir pour calculer en années la durée de la révolution de Jupiter autour du soleil. sachant que la distance moyenne de cette planète au soleil est égale à 5, 2, la distance moyenne du soleil à la terre étant prise pour unité.

10. — Soit ABC un triangle dont les côtés ont respectivement pour longueur BC $= 8$, AC $= 7$, AB $= 9$.

On abaisse du sommet A une perpendiculaire AD sur le côté BC; calculer les segments BD et DC.

11. — Soient AB $= a$, CD $= b$, les deux bases d'un trapèze, soit F un point qui divise AB dans le rapport de $\frac{m}{n}$. On demande dans quel rappport il faut diviser l'autre base CD pour qu'en joignant le point de division E au point F, l'aire du trapèze soit partagée par la droite EF en deux parties qui soient entre elles comme $\frac{p}{q}$.

12. — Étant donné un demi-cercle décrit sur la droite AB comme diamètre, sous quel angle faut-il mener par le point B une droite BC rencontrant en C la demi-circonférence, pour que, la figure tournant autour de AB, le volume engendré par la surface comprise entre AB, BC et l'arc CA soit la n^e partie de la sphère engendrée par le demi-cercle.

13. — Rendre calculable par logarithmes $\cos a + \cos b$.

14. — On coupe une sphère par un plan dont la distance au centre est égale à la moitié du rayon; calculer 1° le rapport des deux parties dans lesquelles ce plan divise la surface de la sphère; 2° le rapport des deux parties dans lesquelles le même plan partage le volume de la sphère.

15. — On partage l'angle de 60° en deux parties telles que le sinus de l'une soit le double du sinus de l'autre. Calculer les sinus des deux parties.

16. — Calculer les côtés d'un triangle connaissant ses angles et la surface décrite par la rotation de la ligne brisée BAC autour de BC.

17. — Calculer les diagonales d'un parallélogramme connaissant leur angle et les côtés du parallélogramme. — Discussion.

18. — Étant donné tg a, calculer sin $2a$, cos $2a$, tg $2a$.

19. — On partage l'angle de 60° en deux parties telles que la tangente de l'une soit le double de la tangente de l'autre. — Calculer les valeurs des deux tangentes.

20. — Étant donné un triangle ABC, trouver les distances aux trois côtés d'un point M situé à l'intérieur du triangle et tel que les surfaces des triangles MAB, MBC, MAC soient dans des rapports donnés.

21. — Étant donné un angle droit OAB et un point M dont les distances aux deux côtés de l'angle droit sont connues, mener par le point M une droite qui forme avec les deux côtés de l'angle droit un triangle de surface donnée m^2.

22. — On donne dans un plan un cercle de rayon égal à 2 mètres et un point A dont la plus courte distance au cercle est 1 mètre. Du point A on mène des tangentes AB et AC au cercle; on joint les points B et C de contact; calculer le volume engendré par le triangle ABC tournant autour du diamètre XY parallèle à BC.

Les côtés AB, AC d'un angle droit BAC sont 3 et 4.

Mener par le sommet A de l'angle BAC et dans son plan une droite telle que les projections AB′, AC′ des deux côtés AB, AC sur cette droite soient égales. Trouver les angles de la droite avec les deux côtés AB, AC.

(*Marseille, 10 avril 1877.*)

D'un point donné, on voit deux circonférences concentriques sous des angles 2α, 2β. La distance de ce point au point de contact de la tangente à la grande circonférence est h. Calculer les rayons des deux circonférences.

Application :

$$\alpha = 21^\circ\ 18'\ 16'',9.$$
$$\beta = 7^\circ\ 19'\ 26'',7.$$
$$h = 822^m,177.$$

(*Nancy, avril 1877.*)

ÉCOLE SAINT-CYR

EXAMENS ORAUX DE 1877.

Algèbre.

1. — On donne un demi-cercle. Trouver sur le prolongement du diamètre AB un point P tel que si l'on mène par ce point une tangente PC au cercle et par le point de contact C une corde CD parallèle au diamètre, on ait PC = CD.

2. — Soit un demi-cercle, et un rayon prolongé jusqu'en un point P. Par le point P, on mène une perpendiculaire au rayon OP, et on prend

une longueur PI = h. Trouver un point M sur OP, tel que si on mène la tangente MH au cercle, on ait MH = MI.

3. — On donne une demi-circonférence O. Sur le prolongement du diamètre AB, on donne un point P. On demande de trouver sur la demi-circonférence un point M tel que si l'on mène la corde MC parallèle au diamètre, on ait PM = MC.

4. — Étant données deux droites rectangulaires Ax et Ay, sur l'une on prend deux longueurs égales AB et BC. Déterminer sur l'autre un point P tel que l'angle BPC soit la moitié de l'angle APB.

5. — Par le point de contact A de deux cercles, on mène la corde AB, puis la corde AB′ perpendiculaire à la première. On détermine ainsi un triangle rectangle ABB′. On demande de mener AC de telle manière que le volume engendré par le triangle tournant autour de la ligne des centres soit maximum. — Examiner les cas où les cercles ont le même rayon.

6. — Soit un cercle O. On élève CM perpendiculaire sur le prolongement du diamètre. On demande de mener la sécante OM rencontrant en N la circonférence de façon que MN = NC. — On demande en second lieu de mener la sécante par l'extrémité A du diamètre de manière que l'on ait encore MN = NC.

7. — La ligne CM étant menée comme précédemment, on demande de mener la ligne ONM de telle manière que le volume engendré par BNMC soit équivalent au volume engendré par le secteur OBN.

8. — On demande de trouver, s'il est possible, une progression géométrique décroissant à l'infini, et dont un terme quelconque soit égal à la somme de tous ceux qui le suivent.

Équations.

1. — Calculer $\cos 4a$ en fonction de $\cos a$. — En déduire $\cos \frac{a}{4}$ en fonction de $\cos a$. — Appliquer au cas où $\cos a = 0$.

2. — Trouver le maximun ou le minimum de $\operatorname{cotg} 2x + \operatorname{cotg} x$.

3. — Résoudre $\operatorname{tg}(x + \alpha) = -3 \operatorname{tg} x$

4. — Résoudre $\sin(x + \alpha) = \cos x$.

5. — Résoudre $\operatorname{tg}(\alpha + x) \operatorname{tg}(\alpha - x) = m$.

6. — Résoudre $\sin \alpha \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos \alpha \operatorname{tg} x + 1 = 0$. Conditions de réalité des racines.

7. — Résoudre $x^2 \sin \alpha - 2x \cos \alpha + \sin \alpha = 0$. Conditions de réalité des racines.

8. — Résoudre $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x = 0$. Peut-on prévoir que les racines seront deux à deux égales et de signes contraires.

9. — Résoudre $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x}$.

10. — Résoudre $\frac{ax}{x-a} + x = b$.

11. — Résoudre l'inégalité $3x^2 - 8x + 12 < 0$.

Géométrie.

1. — Soit une droite DE menée dans un triangle parallèlement à la base BC. Les extrémités D et E de la droite DE étant jointes par des droites aux som-

mets C et B du triangle, on demande quel est le lieu des points d'intersection M des deux droites DC et EB lorsque DE se meut parallèlement à BC.

2. — Deux rayons OA et O'A' étant menés parallèlement dans deux cercles tangents, démontrer que l'angle AMA' formé par les droites menées des extrémités des rayons au point de contact des cercles est un angle droit.

3. — Deux cercles étant tangents l'un à l'autre, on mène par leur point de contact les deux cordes AB et AC perpendiculairement l'une à l'autre. On joint ensuite les deux points B et C par une droite et du point A on mène la perpendiculaire AD sur BC. On demande quel est le lieu du point D quand les cordes tournent autour du point A en restant perpendiculaires l'une à l'autre.

4. — Partager le trapèze ABCD, par une droite partant du point C, de manière que la surface inférieure CFD soit à la surface supérieure ACFB, comme 3 est à 5.

5. — Trouver le rapport des surfaces et des volumes engendrés par un hexagone régulier, lorsqu'il tourne autour d'un diamètre passant par deux sommets opposés et autour d'un diamètre perpendiculaire à deux côtés opposés.

6. — Étant donnée une circonférence tangente à deux autres, la droite menée par les points de tangence passe toujours par le centre de similitude des deux circonférences données.

Trigonométrie.

1. — On donne un demi-cercle et on prolonge le diamètre AB jusqu'en un point P. On demande de mener par le point P une sécante au cercle telle que le segment intercepté MN soit vu du point C, milieu du rayon AO, sous un angle droit.

2. — On donne une droite XY, et deux droites AB, A'B' perpendiculaires à XY. On considère le point M de XY d'où l'on voit AB et A'B' sous le même angle γ. D'un point N de XY, on voit AB sous l'angle α, et A'B' sous l'angle α'. On connaît $MA' = d$; $MN = a$. Calculer AB, A'B', AA'.

3. — Par le point fixe P pris sur le prolongement d'un diamètre, mener une sécante qui fasse avec ce diamètre un angle x qui soit le quart de celui sous lequel on voit du centre le segment intérieur. Calculer sin x lorsque $OP = 2R$.

4. — Étant donnée une circonférence, déterminer l'angle MOB, de façon que l'arc BM tournant autour de AB et le rayon OM tournant autour de la même droite, engendrent des surfaces dont la somme soit donnée.

Mécanique

1. — On a sur une verticale AB deux points placés à une distance d. Du point A, on laisse tomber un corps librement; du point B, on lance de bas en haut un corps animé d'une vitesse initiale v_0. On demande à quel moment ces deux corps se rencontreront.

2. — Étant donné un carré ABCD, on joint le point E, milieu de AB au point F, milieu de BC. On demande de déterminer le centre de gravité du polygone restant AEFDC.

QUESTIONS

POSÉES DANS LES EXAMENS ORAUX DU CONCOURS DE SAINT-CYR

1875, 1876

Problèmes 2e degré.

On donne deux tangentes aux extrémités d'un diamètre. Mener une troisième tangente déterminant avec les premières et le diamètre un trapèze : 1° de périmètre donné; 2° de surface donnée.

Inscrire dans un cercle donné un trapèze isoscèle tel que la somme des carrés de la base et de la hauteur soit maxima.

Maximum et minimum de $\frac{(x-1)(x-3)}{x^2+4}$

On donne le polynôme $x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e$, et on demande de le décomposer en deux facteurs du premier degré en x et en y. Quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients a, b, c, d, e, pour que le polynôme soit un carré?

Inscrire dans un cercle un triangle isoscèle tel que la somme des carrés des trois côtés soit égale à un carré donné. — Discuter.

Étant données deux parallèles et deux points A et B sur l'une d'elles, trouver par le calcul sur l'autre parallèle un point M tel que $MA^2 + MB^2 = K^2$. — Discuter.

Étant donnée une corde AB, trouver sur la circonférence un point M tel que $MA^2 + MB^2 = K^2$. — Discuter.

Mener dans un cercle une corde AB telle que, si on mène le rayon perpendiculaire OI, rencontrant en P la circonférence, la somme AB + IP soit maxima ou minima.

Étant donnée une demi-circonférence AB, mener la corde CD parallèle à AB de telle manière que $AC^2 + CD^2 = K^2$. — Discuter.

Étant donnée l'équation $x^2 + px + q = 0$, on veut en trouver une autre dont les racines soient celles de la proposée diminuées d'un nombre donné h. Quelle serait l'équation qui déterminerait h, de telle façon que l'une des racines de la nouvelle équation fût nulle. — Pourrait-on déterminer h de manière que les racines de la nouvelle équation fussent égales et de signes contraires?

Couper une sphère par un plan de manière que le cône qui a pour base la section et pour sommet le centre de la sphère soit équivalent à la calotte sphérique qui surmonte ce cône.

Dans un demi-cercle mener trois cordes consécutives dont la seconde soit parallèle au diamètre et les autres terminées au diamètre, de manière que la somme des carrés de ces cordes soit égale à un carré donné. — Discuter.

Dans un demi-cercle AB, mener une corde CD parallèle au diamètre, de manière que AC + CD soit donné. — Discuter.

La figure étant la même que précédemment, déterminer le point C par la condition $\frac{AC}{CD} = K$.

Dans un demi-cercle AB, on mène CD perpendiculaire au diamètre, et on mène la corde AC. Déterminer le point C par la condition que $AC + CD = l$. — Discuter.

On considère une circonférence de cercle, une tangente TA, et le diamètre TS du point de contact. Déterminer sur la circonférence un point P tel que la somme des distances à la tangente et au diamètre soit égale à une constante l. — Discuter.

Étant donnés sur une droite trois points fixes A, B, C, déterminer sur cette ligne un quatrième point M tel que $MB^2 = MA \times MC$.

On donne un triangle ABC. Mener une parallèle DE à la base BC de manière que le trapèze DEBC ait une surface donnée.

Étant donné $x^2 + y^2 = a^2$, trouver le maximum ou le minimum de $bx + cy$.

Étant donné un triangle isoscèle ABC, déterminer sur l'un des côtés égaux un point D tel qu'en menant DE parallèle à BC, on ait $BD^2 + DE^2 + EC^2 = K^2$. — Discuter.

On prend un demi-cercle et par un point P du diamètre prolongé, on mène une tangente. Trouver la position du point P pour que, si la figure tourne autour du diamètre, la surface latérale du cône soit dans un rapport donné avec la surface de la zone enveloppée.

On donne une circonférence de rayon R, et deux rayons rectangulaires. Mener une circonférence tangente intérieurement à la première et aux deux rayons. — Si on mène la tangente commune, on demande de calculer les côtés du triangle rectangle qu'elle forme avec les rayons prolongés.

Dans une sphère de rayon R, inscrire un cône qui soit au segment déterminé par la base dans le rapport de m à n.

Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, quelle est la relation qui doit exister entre les coefficients pour que les racines aient un rapport donné?

Trouver sur une demi-circonférence AA′ un point M tel que $2A'M + 3AM$ soit maximum.

On donne un angle BAC et un point D, E sur chaque côté. Mener par le sommet A une droite telle que si des points D, E, on abaisse des perpendiculaires DF, EG sur cette droite, le produit $AF \times AG$ soit egal à un carré donné. — Discuter.

On donne un cercle O, et deux points P, P′ sur un des diamètres. Mener par le point P une sécante PCD telle que le triangle DP′C soit maximum ou minimum. On supposera P extérieur et P′ intérieur à la circonférence.

Étant donnée une circonférence mener une corde AB telle que si OC est la distance du centre à cette corde, $AB + OC$ soit maximum.

Soit un triangle équilatéral ABC, le point P sur le milieu de AB; on propose de mener une parallèle MN au côté AB, de telle manière que le triangle MNP ait un périmètre donné. — Discussion.

Trouver sur la base BC d'un triangle ABC un point M tel que la somme $AM^2 + BM^2 + CM^2$ soit égale à m^2. — Discuter.

Trouver la valeur de x qui rend minima la quantité

$$(ax - a')^2 + (bx - b')^2.$$

Étant donné un rectangle ABCD, on prend sur le prolongement de BC un

point M, et on le joint au point A. Cette ligne AM rencontre le côté CD en N. Trouver la position du point M pour que ADN + MNC ait une valeur donnée. — Trouver le minimum.

On donne une circonférence et deux tangentes parallèles. Un point P étant donné sur le diamètre de contact, mener une troisième tangente telle que la portion comprise entre les deux premières soit vue du point P sous un angle maximum ou minimum.

Équations trigonométriques.

$\text{Sin } x + \sin(a - x) = \frac{1}{m}$.

$2 \sin^2 x - 3 \sin x + a = 0$.

$\text{Cos}^2 x - 3 \cos x + a = 0$.

$2 \cos^2 x - 5 \cos x + a = 0$.

$2 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + a = 0$.

$\text{Cos } \frac{x}{2} + 2 \cos x = a$.

$\text{Sin } 2x = 4 \cos^3 x$.

$\text{Sin } x + \sin^2 x + 2 \cos^2 x = a$.

$2 \text{ tg}^2 x - 3 \text{ tg } x + 2a = 0$.

$\text{Sin } x = \text{cotg } x$.

$\frac{\sin x}{\sin(b + x)} = \frac{\sin a}{2 \sin c}$.

$\frac{\text{tg } (45 - x)}{\text{tg } x} = K$.

$\text{Sin } x + \sin(60^\circ - x) = m$.

$\text{Sin } 3x = \sin x$.

$\text{Tg } x = 2 \cos x$.

$\text{Sin } x + \cos^2 x = a$.

$\text{Tg } x + \text{cotg } x = 0$.

$\text{Tg}^2 x + \text{cotg}^2 x = K^2$.

$\text{Sin } x \text{ tg } x + 2 \cos x = m$.

$\frac{1}{\sin x} = \text{tg } x$.

$\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = b$.

$5 \text{ tg } 2x + 3 \text{ tg } x - 1 = 0$.

$3 \sin^2 x - 2p \sin x + 4 = 0$.

$p \sin x + 9 < \sin^2 x$.

$3 \text{ tg } x = \text{tg } (x + \alpha)$.

$\text{Cos } x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

$\text{Sin } x + \sqrt{3} . \cos x = m$. Discuter.

$\text{Sin}^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}$.

$\text{Sin } x = 4 \sin y$; $x + y$ 60°.

$\mathrm{Tg}^2 x + \sin^2 x = m.$
$\mathrm{Tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x = \cos x + \sin x.$
$\mathrm{Sin}\, x + \cos x = \sin 2x.$
$\mathrm{Tg}\,(x + 45) + \mathrm{tg}\,(x - 45) = 4.$
$\mathrm{Tg}\, 2x\ \mathrm{tg}\, 3x = 1.$
$\mathrm{Tg}\, x\ \mathrm{tg}\, 3x = 2.$
$\mathrm{Sin}\, x \sin (60^\circ - x) = a.$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 1re.

Solution par M. VAUTRÉ.

Déterminer un triangle, dont les côtés soient des multiples du rayon du cercle inscrit. Démontrer que, le rayon étant pris pour unité, le cube du nombre qui représente la surface est égal à la somme des cubes des trois côtés.

Soit ABC le triangle cherché, α, β, γ, les points où le cercle inscrit touche les côtés. En prenant $R = O\alpha$ pour unité et donnant à p, a, b, c les significations connues, on a

$$\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}} = 1$$

ou

$$(p-a)\,(p-b)\,(p-c) = p \qquad (1)$$

Posons $A\beta = x$, $\alpha B = y$, $\alpha C = z$.

Nous aurons

$$p = x + y + z$$
$$a = y + z$$
$$b = x + z$$
$$c = x + y$$

Par suite l'équation (1) devient

$$xyz = x + y + z \qquad (2)$$

Si x, y, z sont entiers, a, b, c le seront également et par conséquent multiples de R. Or l'équation (2) est satisfaite pour

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3;$$

ce sont donc les valeurs cherchées. On en tire

$$a = 5,\ b = 4,\ c = 3,$$

où, en rétablissant le rayon

$$a = 5R,\ b = 4R,\ c = 3R.$$

De ce que $x = 1 = R$, on en conclut que $A\beta O\gamma$ est un carré et que ABC est un triangle rectangle. (On a d'ailleurs $a^2 = b^2 + c^2$.)

Par suite $\qquad$ aire ABC $= \frac{1}{2} bc = 6$

or $\qquad a^3 + b^3 + c^3 = 216 = 6^3$.

Donc.....

QUESTION 23.

Solution par M. Biette, élève du Lycée du Havre.

Un triangle isoscèle ABC, *mobile, a deux côtés* AB *et* AC *égaux à une longueur donnée. Le sommet* A *décrit une circonférence donnée* O *et les deux sommets* B *et* C *se meuvent sur une autre circonférence également donnée* O'. *Trouver le lieu géométrique du symétrique du point* A *par rapport à* BC :

Soient R et R' les rayons des circonférences O et O', et AB $= l$ la longueur donnée. Dans le triangle BAO' on a

$$R'^2 = l^2 + AO'^2 - 2AO'.\ AD \qquad (1)$$

Supposons $l > R'$; l'égalité (1) peut s'écrire

$$l^2 - R'^2 = AO'\ (2AD - AO') = AO'.\ A'O'$$

Ce qui prouve que le lieu cherché est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la circonférence O par rapport au point O'. C'est donc une circonférence. Le point O' est dans ce cas le centre de similitude inverse de la circonférence du lieu et de la circonférence O.

Si l'on avait $l < R'$ on aurait

$$AO' - A'O' = l^2 - R'^2$$

quantité négative. Le point O' serait alors le centre de similitude directe de la circonférence du lieu et de la circonférence O.

Remarque. — Si la circonférence O passait par le point O' le lieu géométrique serait réduit à une droite; si l'on avait $l = R'$, on aurait

$$AO' - A'O' = 0;$$

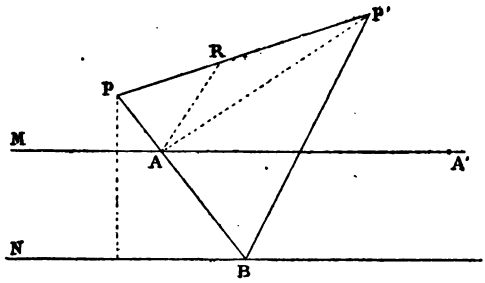
dans ce cas le lieu se réduirait au point O'.

QUESTION 33.

Solution par MM. Lynch et Woestyn, Lycée Condorcet.

Étant données deux parallèles M *et* N *et deux points quelconques* P *et* P', *mener par le point* P *une sécante* PAB *telle que la partie interceptée* AB *soit vue du point* P' *sous un angle donné* α.

Supposons le problème résolu.



Par A menons AR parallèle à BP'. Les triangles semblables PBP' et PAR donnent $\frac{PR}{P'R} = \frac{PA}{AB} =$ constante.

Or l'angle RAP' $=$ AP'B $= \alpha$.

Le point A se trouve donc sur le segment capable de l'angle α, décrit sur RP'.

Donc pour résoudre le problème on devra partager PP' dans le rapport constant de PA à AB et sur RP' décrire un segment capable de l'angle donné α. L'intersection de l'arc de ce segment avec la parallèle M donnera le point A. On joindra PA, ce sera la droite demandée.

Le problème aura généralement deux solutions, l'arc du segment coupant la droite M en un second point A'.

Nota. — A résolu la même question M. Belin, de Semur.

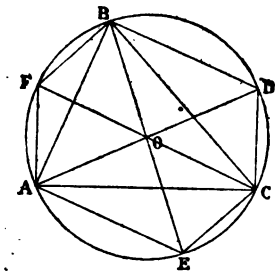
QUESTION 36.

Solution par M. Biette, élève au Lycée du Havre.

Si l'on mène les diamètres passant par les sommets d'un triangle inscrit dans une circonférence, on détermine en joignant les points de division de la circonférence, un hexagone dont le périmètre est égal à 4 *fois la somme du rayon du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle.* (Léon Arnoye.)

Nous démontrerons d'abord que deux côtés opposés AE,

BD, par exemple, sont égaux. En effet, les deux triangles rectangles ABD, BEA ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal $A\hat{E}B = A\hat{D}B$.



Or dans le triangle rectangle ABE on a

$$AE = 2R \cos BEA = 2R \cos C$$

de même

$$CE = 2R \cos BEC = 2R \cos A$$
$$CD = 2R \cos CDA = 2R \cos B$$

On aura donc en désignant par P le périmètre

$$P = 2\ (AE + CE + CD)$$

donc $$P = 4R\ (\cos A + \cos B + \cos C)$$

mais $$A + B + C = 180^\circ, \text{ donc}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

donc $$P = 4\left(R + 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right)$$

et comme $$4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = r$$

r étant le rayon du cercle inscrit au triangle, on a finalement $$P = 4\ (R + r).$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Demortain, école communale de Doullens; Bernaou, collége d'Épernay.

QUESTION 37.

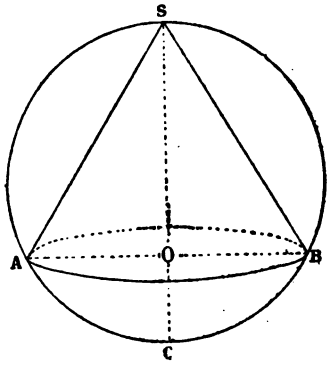
Solution par M. Mahieux, élève du Lycée de Saint-Quentin.

Inscrire dans une sphère un cône dont la surface totale, augmentée de la surface latérale, soit égale à la surface de la sphère.

(L. Julliard.)

Prenons pour inconnue la hauteur SO du cône et soit D le diamètre de la sphère.

La surface latérale du cône est $\pi x \sqrt{D^2 - Dx}$ et la surface totale est $\pi \sqrt{x\ (D - x)}\ [\sqrt{Dx} + \sqrt{x(D - x)}]$; on a donc à résoudre l'equation



$$2x\sqrt{D^2-Dx}+Dx-x^2=D^2$$

ou

$$x^2+(D^2-Dx)-2x\sqrt{D^2-Dx}=0$$

que l'on peut écrire

$$(x-\sqrt{D^2-Dx})^2=0$$

ou $\quad x^2=D(D-x).$

La hauteur cherchée est donc égale au plus grand segment du diamètre divisé en moyenne et extrême raison.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Pyolle, du lycée de Constantine; Merieult et Biette, du Havre; Canon et Orth, de Liége; Clabé et Jullidière, de Mont-de-Marsan; Osmont et Chastan, de Valence; Aubert, de Marseille; Nénon, de Dinant.

QUESTION 40.

Solution par M. Vautré, de Saint-Dié.

Toute puissance entière n^α *d'un nombre entier est toujours égale à la somme de* n *termes consécutifs, pris dans la suite naturelle des nombres impairs* 1, 3, 5, 7, ...

Application au cas où $\alpha=3$, *et où* n *reçoit successivement les valeurs* 1, 2, 3,... (de Montferrier.)

Ce théorème est traduit par l'équation

$$n^\alpha=a+(a+2)+\ldots+[a+2(n-1)] \qquad (1)$$

dans laquelle il faut prouver que a est entier, positif et impair.

Cette équation peut s'écrire

$$n^\alpha=n^2+n(a-1)$$

d'où $\quad a=n^{\alpha-1}-n+1.$

Il est d'abord évident que a est entier, et de plus positif, puisqu'on a $a>2$; d'ailleurs $n^{\alpha-1}$ est pair avec n, ou impair avec elle; donc $n^{\alpha-1}-n$ est pair et par suite a est impair; c. q. f. d.

Dans l'équation (1) faisons $\alpha=3$ et $n=1, 2, 3,\ldots$ il vient

$$1^3=1;\ 2^3=3+5,\ 3^3=7+\ldots \qquad (2)$$

En général, la progression qui égale n^3 a pour dernier terme $l_n = n^2 + n - 1$,
celle qui égale $(n + 1)^3$ a pour premier terme

$$a_{n+1} = n^2 + n + 1$$

Donc $a_{n+1} = l_n + 2$.

Par suite, si l'on ajoute membre à membre les n premières équations (2), les seconds membres forment la progression continue 1, 3, 5, 7,... composée de $1 + 2 + \ldots + n$ termes, et l'on a

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

Calculant d'abord le nombre des termes du second membre, puis leur somme, on trouve successivement

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

La somme des cubes des n premiers nombres est égale au carré de leur somme.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Jullidière, de Mont-de-Marsan; X***, du collége Rollin; Nénon, de Dinant.

QUESTION 41.

Solution par M. Bernaou, élève du Collége d'Épernay.

Inscrire dans une sphère donnée un prisme triangulaire régulier de volume maximum. Ce maximum est égal au cube du rayon de la sphère. (MARTUS.)

Soit x le rayon du petit cercle de la sphère circonscrit à la base du prisme et $2y$ la hauteur de ce prisme; on a la relation (1) $x^2 + y^2 = r^2$.

La base est un triangle équilatéral dont la surface est $\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$ et le volume du prisme sera $\frac{3x^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2y$.

En tenant lieu de la relation (1) la quantité à rendre maxima est $\frac{3\sqrt{3}}{2} y(R^2 - y^2)$ ou simplement $y(R^2 - y^2)$.

Cette quantité sera maxima en même temps que $y^2(R^2 - y^2)^2$. La somme des facteurs étant constante, le maximum aura lieu quand on aura

$$\frac{y^2}{1} = \frac{R^2 - y^2}{2}$$

d'où

$$y = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

par suite

$$x = \frac{R\sqrt{2}}{3}$$

et le volume du prisme maximum sera

$$\frac{2R^2\sqrt{3}}{4} \; \frac{2R}{\sqrt{3}} = R^3.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Pradel, de Montauban; Biette, du Havre; Landouzy, de Lille; Gouot, de Tonnerre; Pyolle, de Constantine; Nénon, Rigot, Meurant, de Dinant.

M. Degueldre, du collége de Belle-Vue, à Dinant, fait remarquer, en outre, que, par la même méthode, on pourrait démontrer que, dans le cône minimum circonscrit à une sphère,

1° La hauteur du cône est double du diamètre de la sphère;

2° Son volume est double de celui de la sphère;

3° Sa surface totale est double de celle de la sphère.

Il indique, en outre, cette propriété que : le volume maximum du cylindre inscrit dans une sphère est au volume de la sphère comme 3 : 1.

QUESTIONS PROPOSÉES

53. — Construire un pentagone dans lequel chaque diagonale soit parallèle au côté opposé. *(Dellac.)*

54. — On donne deux droites rectangulaires OX et OY. Sur OX, on prend deux points fixes A et B, et sur OY un point mobile C. On fait passer une circonférence par ces trois points. Trouver géométriquement : 1° le lieu de l'extrémité M du diamètre qui passe par le point C; 2° le lieu du point N de rencontre de AC avec une parallèle à OX menée par le point M. *(Launoy.)*

55. — Trouver cinq nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres. *(Arnoye.)*

56. — Lorsque les trois côtés d'un triangle rectangle sont en progression arithmétique, le rayon du cercle inscrit est égal à la raison de cette progression. *(Arnoye.)*

57. — Parmi tous les triangles MNP que l'on forme en abaissant d'un point quelconque M du côté AB d'un triangle ABC des perpendiculaires MN, MP sur les deux autres côtés, AC, BC, quel est celui dont la surface est maxima? *(Arnoye.)*

58. — Les numérateurs de plusieurs fractions égales sont des équimultiples respectivement des quotients trouvés en divisant les dénominateurs par leur plus grand commun diviseur. *(Reynaud.)*

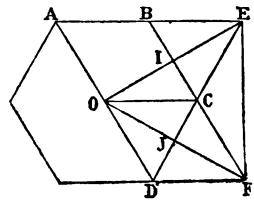
59. — On a un angle BAC; par le sommet A on fait passer un cercle O, ayant son centre sur le côté AB; puis l'on considère le cercle O, tangent au premier cercle et aux deux côtés de l'angle. Lieu géométrique du point de contact M des deux cercles. *(Julliard.)*

60. — Les centres des cercles inscrits dans les quatre triangles formés par deux côtés et une diagonale d'un quadrilatère inscriptible sont les sommets d'un rectangle. *(Thual.)*

61. — Résoudre les deux équations

$$x^y = y^x;$$
$$x^p = y^q.$$

Relations qui doivent exister entre p et q pour que x et y soient rationnels. *(Weill.)*



ERRATUM DE LA PAGE 192.

La figure ci-contre doit remplacer celle de la solution.

En outre, au lieu de dire : *mais les droites FI et GE étant médianes, O et F leurs points de rencontre...*, il faut lire : *mais les droites FI JE étant médianes du triangle OEF, leurs points de rencontre...*

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS.— 12320-7.

THÉORIE DE L'INVERSION

OU

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

par M. Cochez.

(*Suite*, voir page 225.)

Définitions. VI. — *Inversion d'une circonférence.*

On sait que l'on appelle *puissance* d'un point O par rapport à une circonférence, le produit constant $Om \times OM$ des segments Om et OM compris entre le point O et la circonférence, d'une sécante mobile passant par le point O; que ce produit est, conformément à la règle des signes, considéré comme positif ou comme négatif, suivant que le point O est situé à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle. Par conséquent, si l'on prend le point O pour pôle et un module égal en grandeur et en signe à la puissance du point O, par rapport à la circonférence, celle-ci se transformera en elle-même, quelle que soit la position du point O. On voit ainsi que la circonférence est une *figure anallagmatique*, en prenant pour pôle un point quelconque de son plan et pour module la puissance du pôle par rapport à cette circonférence.

Mais si le module de transformation donné, que nous désignerons par μ, n'est pas égal à la puissance p du pôle, l'inverse d'une circonférence est une figure homothétique de cette circonférence par rapport au pôle, et, par suite, d'après le théorème précédent, une autre circonférence dont le rayon est égal à celui de la première multiplié par le rapport $\frac{\mu}{p}$.

Il est facile de vérifier que ce résultat subsiste lorsque l'on tient compte des signes de μ et de p.

VII. — *Inversion d'une sphère et d'un cercle quelconque de l'espace.*

Si l'on fait tourner une circonférence autour du diamètre passant par le pôle, cette circonférence engendre une sphère ; mais en même temps la figure inverse tourne autour de son diamètre et engendre une seconde sphère homothétique à la première par rapport au pôle. On a donc la proposition suivante :

Théorème 4. — *Pour un point quelconque de l'espace la figure inverse d'une sphère est une sphère homothétique de la première par rapport au pôle et dont le rayon est égal à celui de la première multiplié par le quotient du module par la puissance du point par rapport à la sphère.*

Nous ferons observer qu'il résulte immédiatement de la définition des figures inverses que trois groupes de points inverses quelconques de l'espace M et m, M' et m', M'' et m'', sont situés sur une même sphère.

VIII. **Théorème 5.** — *L'inverse d'une circonférence* C *par rapport à un point quelconque de l'espace pris pour pôle est une autre circonférence* c.

En effet, faisons passer par cette circonférence C deux sphères quelconques S et S' ; il est évident que l'inverse de la circonférence C est l'intersection des figures inverses des deux sphères S et S'. Mais les deux figures inverses de S et de S' sont elles-mêmes en général, deux sphères S et S'. L'intersection de ces deux sphères est une circonférence c inverse de la circonférence donnée C; c. q. f. d.

Nous donnerons plus tard des applications de ce théorème fort important.

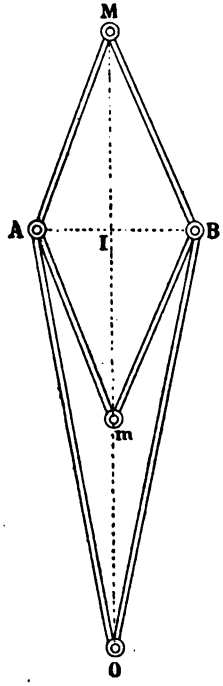
§ 2.

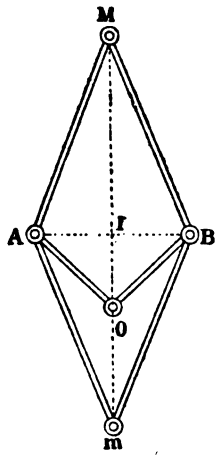
IX. — *Inverseur Peaucellier.*

Cet appareil se compose d'un losange formé de quatre tiges égales, MAmB articulées en leurs points d'intersection ; deux autres tiges égales OA et OB, sont articulées entre elles au point O et avec les précédentes en A et B. *Si l'on déforme*

le losange en fixant le point O, *les points* M *et* m *décrivent deux figures inverses.*

En effet, les points M, *m* et O sont en ligne droite puis-





qu'ils sont à égale distance des points A et B. En désignant par I le point d'intersection des diagonales du losange, on a :

$$OM = OI + Im$$
$$Om = OI - Im$$

par suite, en multipliant membre à membre $OM \times Om = \overline{OI}^2 - \overline{Im}^2$

mais les triangles rectangles donnent

$$\overline{OI}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{IB}^2$$
$$\overline{Im}^2 = \overline{Bm}^2 - \overline{IB}^2$$

d'où l'on tire $\overline{OI}^2 - \overline{Im}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{Bm}^2$

et enfin $OM \times Om = \overline{OB}^2 - \overline{Bm}^2$.

Le second membre est une quantité constante ; c'est le module de l'inversion. On remarquera que ce module est positif ou négatif suivant que le point O est situé à l'extérieur ou à l'intérieur du losange.

La démonstration fort simple que nous venons de donner est due à M. Mannheim.

X. — *Parallélogramme de Watt.*

Si l'un des points M ou m de l'inverseur est relié par une tige inflexible à un point fixe O', ce point M ou m décrira une circonférence; par conséquent le point réciproque m ou M décrira aussi une circonférence de rayon généralement différent. L'inverseur Peaucellier muni de cette tige supplémentaire a été utilisé pour tracer des cercles de 12 mètres de rayon et de centre inaccessible : et aussi, pour simplifier la construction des planisphères et des cartes géographiques.

Si la longueur de cette tige supplémentaire est égale à OO', la circonférence décrite par le point M ou m passe par le point O et son inverse est une droite perpendiculaire à OO'.

De cette façon on transforme rigoureusement un mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif, et réciproquement. Par conséquent, cet appareil remplace avec avantage le parallélogramme de Watt qui ne donnait de ce problême qu'une solution approchée.

Cette remarquable découverte (1864) a valu à M. le colonel Peaucellier le prix Monthyon que lui a décerné l'Institut de France.

XI. — *Inverseur de Hart.*

M. Hart a appliqué un théorème de S. Roberts à la construction d'un inverseur plus simple que celui du colonel Peaucellier.

Soit le trapèze symétrique ABDC dans lequel AB = CD, AD = BC; menons une parallèle OMm aux deux bases AC, BD.

On a :

$$\frac{OM}{BD} = \frac{OC}{CD},$$

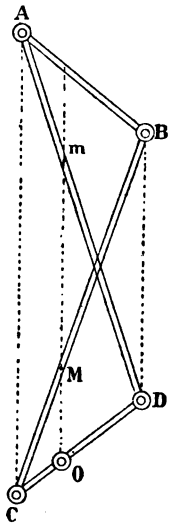
$$\frac{Om}{AC} = \frac{OD}{CD};$$

multipliant membre à membre ces deux relations, il vient :

$$\frac{OM \times Om}{BD \times AC} = \frac{OC \times OD}{CD^2};$$

mais puisque le trapèze ABDC est symétrique, il est inscrip-

tible et le théorème de Ptolémée sur le produit des diagonales donne :



$$AB \times CD + BD \times AC = AD \times BC,$$

d'ou $\quad \overline{AB}^2 + BD \times AC = \overline{AD}^2;$

et enfin

$$OM \times Om = \frac{OC \times OD}{\overline{CD}^2}\,(\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2).$$

L'inverseur de Hart se compose de quatre tiges AB, BC, CD, DA égales deux à deux et articulées aux quatre points A, B, C, D. Par conséquent si l'on déforme le quadrilatère autour du point O, les deux points M et *m* restent fixes sur les côtés BC et AD, mais décrivent dans le plan deux figures inverses.

Les considérations que nous avons exposées dans le numéro précédent concernant la transformation des mouvements rectiligne et circulaire, s'appliquent naturellement à l'inverseur de Hart, ainsi qu'à tous les autres inverseurs.

Nous avons supposé le point O pris pour pôle sur le côté CD ; dans ce cas l'inverseur est positif ; si l'on prend le point O sur le prolongement de CD, en supposant que les tiges BC et AD de l'inverseur ont été prolongées, l'inverseur est négatif.

(A suivre.)

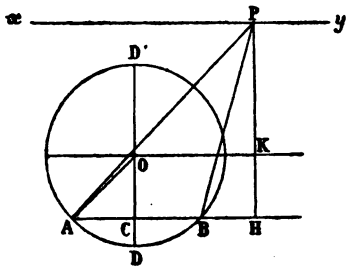
ÉTUDES SUR LES MAXIMA ET MINIMA

par M. Cochez *(suite)*.

(Voir p. 232.)

Problème VI. — *On donne un cercle* O *et une droite* xy. *Parmi tous les triangles ayant leur sommet en un point* P *donné sur cette droite et pour base une corde* AB *parallèle à cette droite, quel est celui de surface maximum ?*

Ce problème donne lieu à un maximum, car si la base se déplace parallèlement à elle-même depuis D jusqu'à D', elle part de zéro pour revenir à zéro; il en est donc de même de la surface du triangle. Cette surface variant de zéro à zéro passera par un maximum.



Ceci posé, appelons R le rayon du cercle et soient

$$PK = h$$
$$HK = OC = x$$
$$AB = 2y.$$

La surface du triangle est $(x + h)\, y$; de plus

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

La fonction à rendre maximum est donc

$$\text{(A)} \qquad (x + h)\sqrt{R^2 - x^2}$$

Appliquant le principe énoncé, il vient

$$(1) \quad (x + h)\sqrt{R^2 - x^2} = (x_1 + h)\sqrt{R^2 - x_1^2}.$$

Si l'on voulait faire disparaître les radicaux en élevant au carré, on arriverait à une équation du troisième degré pour déterminer l'x du maximum.

L'artifice suivant permet de ramener l'équation au second degré.

L'égalité (1) donne

$$x\sqrt{R^2 - x^2} + h\sqrt{R^2 - x^2} = x_1\sqrt{R^2 - x_1^2} + h\sqrt{R^2 - x_1^2}$$

ou

$$(2) \quad h\left[\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x_1^2}\right] = x_1\sqrt{R^2 - x_1^2} - x\sqrt{R^2 - x^2}$$

Si l'on remarque que

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{p} - \sqrt{q} &= \frac{p - q}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \\ \text{et que} \qquad n\sqrt{q} - m\sqrt{p} &= \frac{n^2 q - m^2 p}{n\sqrt{q} + m\sqrt{p}} \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

la relation (2) s'écrira après simplifications

$$h\,\frac{x_1^2 - x^2}{\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - x_1^2}} = \frac{R^2(x_1^2 - x^2) - (x_1^4 - x^4)}{x_1\sqrt{R^2 - x_1^2} + x\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Divisant les deux membres par $x_1^2 - x^2$ et faisant dans le résultat $x_1 = x$, on a pour déterminer l'x qui rend maximum la fonction (A),

$$2x^2 + hx - R^2 = 0.$$

d'où $$x = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 8R^2}}{4}$$

La solution négative doit être négligée, x ne pouvant être négatif, car il est bien évident que la surface augmente tant que H est entre le point P et le point K, puisque la corde augmente ainsi que la hauteur.

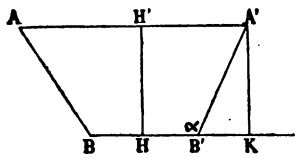
Donc

l'x maximum est $$\frac{-h + \sqrt{h^2 + 8R^2}}{4}$$

Si la droite xy est tangente au cercle $h = R$, et $x = \frac{R}{2}$.

Si le point P se confond avec le point de contact P_1, le triangle P_1AB est isoscèle et inscrit; sa surface est alors $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. Nous voyons donc que *de tous les triangles isoscèles inscrits c'est le triangle équilatéral qui a la surface maximum.*

Problème VII. — *Parmi tous les vases de même capacité dont la forme est celle d'un tronc de cône et dans lesquels l'arête fait avec le fond un angle donné α, trouver celui dont la surface totale soit la plus petite possible.* (Frenet.)



Soient $A'H' = r$
$HH' = y$
$AB = A'B' = z$
$HB' = x$

on a $A'H' = HK = HB' + B'K$
$= x + B'K.$

or $$B'K = \frac{A'K}{tg\,(180^\circ - \alpha)} = -y \cot g\, \alpha$$

donc $$r = x - y \cot g\, \alpha \qquad (1)$$

et $$z = \frac{y}{\sin \alpha} \qquad (2)$$

alors

$$(3) \quad V = \frac{1}{3}\pi y\,(x^2 + rx + r^2) = \frac{1}{3}\pi y\,\frac{x^3 - r^3}{x - r}$$

remplaçons dans cette expression r par sa valeur (1), il vient toutes réductions faites

$$(3') \qquad V = \frac{1}{3}\pi \operatorname{tg} \alpha \left[x^3 - (x - y \operatorname{cotg} \alpha)^3\right]$$

telle est l'expression du volume.

La surface totale du vase se compose de la surface de la base BB' plus de la surface latérale du tronc de cône; on a

$$S = \pi x^2 + \pi \frac{y}{\sin \alpha}\left(x + (x - y \operatorname{cotg} \alpha)\right)$$

Divisant les deux membres de cette relation par π, multipliant par $\cos \alpha$, et remarquant que

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

il vient toutes réductions faites

$$\frac{S \cos \alpha}{\pi} = 2x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - (x - y \operatorname{cotg} \alpha)^2$$

or (3') donne

$$(x - y \operatorname{cotg} \alpha)^3 = x^3 - \frac{3V}{\pi \operatorname{tg} \alpha}$$

par suite $(x - y \operatorname{cotg} \alpha)^2 = \left(x^3 - \frac{3V}{\pi \operatorname{tg} \alpha}\right)^{\frac{2}{3}}$

donc $\frac{S \cos \alpha}{\pi} = 2x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left(x^3 - \frac{3V}{\pi \operatorname{tg} \alpha}\right)^{\frac{2}{3}}$

telle est l'expression qu'il s'agit de rendre minimum.

Posons pour plus de simplicité

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = m$$

$$\frac{3V}{\pi \operatorname{tg} \alpha} = n$$

la fonction prend la forme

$$mx^2 - (x^3 - n)^{\frac{2}{3}}$$

Appliquons le principe fondamental, il vient

$$m x^2 - (x^3 - n)^{\frac{2}{3}} = m x_1^2 - (x_1^3 - n)^{\frac{2}{3}}$$

ou $\quad m(x^2 - x_1^2) - \left[(x^3 - n)^{\frac{2}{3}} - (x_1^3 - n^{\frac{2}{3}}\right] = 0 \qquad (4).$

Remarquant que

$$\frac{p^2 - q^2}{\sqrt[3]{p^4} + \sqrt[3]{p^2q^2} + \sqrt[3]{q^4}} = \sqrt[3]{p^2} - \sqrt[3]{q^2}.$$

l'expression (4) prendra la forme

$$m(x^2 - x_1^2) - \frac{(x^3 - n)^2 - (x_1^3 - n)^2}{(x^3 - n)^{\frac{4}{3}} + (x^3 - n)^{\frac{2}{3}}(x_1^2 - n)^{\frac{2}{3}} + (x_1^3 - n)^{\frac{4}{3}}} = 0$$

Divisant par $x - x_1$, faisant dans le résultat $x = x_1$, il vient toutes réductions faites

$$mx\,(x^3 - n)\sqrt[3]{x^3 - n} - x^2\,(x^3 - n) = 0$$

ou $$x\,(x^3 - n)\left[m\sqrt[3]{x^3 - n} - x\right] = 0$$

d'où

$$(a) \qquad x = 0$$

$$(a') \qquad x^3 - n = 0$$

$$(a'') \qquad m\sqrt[3]{x^3 - n} - x = 0$$

(a) doit être rejeté, cette solution répondant à un cône ;

(a') doit également être rejeté car on aurait

$$x^3 = n$$

ou $$x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi \operatorname{tg} \alpha}}$$

qui porté dans (1) donnerait

$$r = x - y \operatorname{cotg} \alpha = 0;$$

l'équation qui donne l'x minimum est alors

$$m\sqrt[3]{x^3 - n} = x$$

d'où $$x = \sqrt[3]{\frac{m^3 n}{m^3 - 1}}$$

remplaçant m et n par leurs valeurs on a

$$x = \sqrt[3]{\frac{24V \cos^6 \frac{\alpha}{2}}{\pi \operatorname{tg} \alpha \left[8 \cos^6 \frac{\alpha}{2} - 1\right]}}$$

(A suivre.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877.

Classe de mathématiques spéciales.

Composition en mathématiques.

Rechercher les surfaces S du second degré, sur lesquelles existe une droite D, telle que l'hyperboloïde de révolution H, qui a pour axe une génératrice rectiligne quelconque G de la surface S, et du même système que D, et qui passe par la droite D, coupe orthogonalement la surface S en tous les points de cette droite.

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H qui se rapportent à une même surface S, jouissant de la propriété énoncée :

1° Trouver le lieu des sommets A et celui des foyers F des hyperboloïdes H′ conjugués des hyperboloïdes H;

2° Par l'un des foyers F de l'hyperboloïde H′ on mène un plan P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G et D et faisant avec cette dernière un angle supplémentaire de celui que fait avec cette même droite l'axe G de l'hyperboloïde H. Trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan P coupe la droite D à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface S et de l'hyperboloïde H.

Classe de mathématiques élémentaires.

Composition en mathématiques.

Étant donnés deux plans P et P′ et un point A en dehors des deux plans, on considère toutes les sphères qui passent par le point A et qui sont tangentes aux deux plans donnés.

1° Trouver le lieu de la droite qui joint le point A au centre de la sphère variable.

2° Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.

Enseignement spécial.

Mathématiques appliquées et géométrie descriptive.

I. — Sur deux plans inclinés P, Q, faisant avec le plan horizontal, le premier un angle de 60°, le second un angle de 30°, et, dans un plan perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q, on place deux petits poids égaux réunis par un fil qui s'enroule sur une petite poulie dont l'axe coïncide avec l'intersection des plans P et Q, et dont les dimensions sont telles que les deux portions du fil sont repectivement parallèles aux deux plans inclinés. On demande :

1° Dans quel sens se produit le mouvement;

2° Qels sont les espaces parcourus par les poids après trois secondes;

3° Quelles sont les vitesses acquises par ces mêmes poids après trois secondes.

II. — On donne, dans le plan vertical de projection, un hexagone régulier dont un côté, égal à 4 centimètres, coïncide avec la ligne de terre; cet hexagone est l'une des bases d'un prisme oblique dont les arêtes sont horizontales, et forment un angle de 60° avec la ligne de terre; la seconde

base du prisme est dans un plan parallèle au plan vertical de projection situé à 12 centimètres en avant de ce plan. Sur la face supérieure du prisme repose une sphère qui a 4 centimètres de rayon, et qui touche le plan de la face supérieure du prisme au centre du parallélogramme formé par cette face.

On demande de représenter le système de ces deux corps solides, et de dessiner leurs ombres propres, l'ombre portée par la sphère sur le prisme, et les ombres portées par les deux corps sur les plans de projection.

On supposera le système éclairé par *la lumière dite à 45°*.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1875

Classe de troisième.

1. — Inscrire dans une circonférence un triangle ABC dont l'angle A soit connu et dont les côtés AB et BC soient tangents à deux cercles donnés.

2. — Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction décimale périodique simple de un, deux ou quatre chiffres.

Classe de seconde.

1. — Lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux droites données est constante. — Lieu géométrique des points dont la somme des distances à trois droites est constante.

2. — Construire un triangle MNP dont les côtés vont passer par trois points fixes A, B, C, sachant que les sommets M et N sont sur un cercle donné passant par les points A et B, et que l'angle P a une valeur donnée.

3. — Étant donnée une équation du second degré, former les équations qui ont pour racines : 1° les carrés des racines de la première; 2° les inverses des racines de la première. — Chercher quels doivent être les coefficients de la première pour que l'équation qui admet pour racines les carrés des racines de la proposée ne diffère pas de celle-ci.

Classe de rhétorique.

Une sphère repose sur un plan horizontal; sur le même plan repose par sa base un cône droit dont la hauteur égale le diamètre de la sphère. On demande de couper les deux corps par un plan horizontal de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.

Classe de philosophie.

Deux triangles équilatéraux ABC, A'B'C' sont disposés dans deux plans parallèles de façon que les sommets de l'un et les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du deuxième sur le plan du premier soient les sommets d'un hexagone régulier. Les centres des deux triangles étant O et O', on demande de déterminer la figure du solide commun aux deux tétraèdres OABC, O'A'B'C' et d'exprimer le volume de ce solide à l'aide du côté a des triangles équilatéraux et de la distance d des deux plans.

Classe de mathématiques élémentaires.

On donne les côtés a,b,c, d'un triangle ABC. Des sommets comme centres, on décrit trois circonférences qui se touchent deux à deux extérieurement. Déterminer les rayons des deux circonférences tangentes aux trois premières.

ACADÉMIES D'AIX ET DE MONTPELLIER

Concours académique de mathématiques élémentaires (1877).

Un plan mobile P reste superposé à un plan fixe Q et se meut avec cette condition que deux droites déterminées Mx, My du plan mobile P, faisant entre elles un angle θ, restent tangentes à deux cercles C'C' situés dans le plan fixe Q, la distance des centres C, C' étant $2c$ et les rayons étant R et R'. 1° Prouver que toute droite d'un plan mobile P passe constamment par un point ou reste toujours tangente à un cercle situé dans le plan fixe Q, et distinguer les droites du plan mobile passant par des points correspondants du plan fixe, et les droites du même plan mobile qui restent tangentes à des cercles correspondants du plan fixe, et discuter les positions de ces droites, de ces points et de ces cercles; 2° Démontrer que les droites du plan mobile qui restent tangentes à des cercles égaux du plan fixe, sont toutes tangentes à un cercle situé dans le plan mobile; 3° Prouver qu'il existe un point du plan mobile qui décrit un cercle sur le plan fixe, et déterminer par le calcul ce point et ce cercle en fonction des données; 4° Établir que pendant le mouvement du plan mobile, un cercle situé dans ce plan roule sans glisser sur un autre cercle situé dans le plan fixe, et déterminer ces deux cercles en position et en grandeur, chacun dans son plan respectif.

Concours de 1874.

Un plan mobile glisse sur un plan fixe avec la condition que deux points fixes du premier décrivent deux droites données dans le plan fixe.

1° Démontrer qu'il existe dans le plan mobile un cercle qui roule sans glisser sur un cercle du plan fixe;

2° Quels sont les points du plan mobile qui décrivent sur le plan fixe des lignes droites;

3° Quel est le point du plan mobile qui décrit un cercle sur le plan fixe.

Concours académique de mathématiques spéciales (1877).

On donne un ellipsoïde E rapporté à ses plans principaux et une surface du second degré S.

1° Trouver le lieu des centres des sections faites dans la surface S par les plans tangents à l'ellipsoïde E : ce lieu est une surface Σ.

2° Construire les traces de la surface Σ sur les plans coordonnés dans le cas où la surface S a ses axes coïncidents avec ceux de l'ellipsoïde.

3° Dans ce même cas couper la surface Σ par des surfaces concentriques et homothétiques à S, et en déduire un mode de génération de la surface Σ en faisant varier le rapport d'homothétie.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL 1877.

Géométrie descriptive.

On donne deux points A et B dont les distances au plan horizontal sont 3 et 1 centimètres; les distances au plan vertical 1 et 2 centimètres; la distance du point A au point B étant 3 centimètres, on demande 1° de construire les traces du plan qui contient les deux points A et B et qui fait un angle de 70° avec le plan horizontal; 2° d'indiquer le nombre de solutions du problème, de les discuter, de déterminer les angles que la droite AB fait avec les traces verticales et horizontales du plan et avec le plan vertical.

Mécanique.

Étant donnés deux plans inclinés AB et AC ayant même hauteur AD et formant avec le plan horizontal BC des angles ACD, DBA complémentaires, et dans le rapport de 1 à 2. On laisse tomber simultanément du point A trois corps : le premier suivant le plan incliné AC, le second suivant le plan incliné AB, le troisième suivant la verticale AD.

Leur vitesse initiale est nulle et l'on fait abstraction du frottement et de la résistance de l'air.

L'intensité de la pesanteur est 9,8088.

On demande 1° de déterminer les positions M, L, P, des trois corps après une chute de 3 secondes,

2° De calculer les côtés et les angles du triangles MLP que l'on obtient en joignant deux à deux les points M, L, P, par des droites.

3° De démonter que quel que soit le temps de la chute, ce triangle reste toujours semblable à lui-même et que son aire est proportionnelle à la quatrième puissance de ce temps.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

Sachant que $\operatorname{tg}\alpha$ et $\operatorname{tg}\beta$ sont racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$, calculer en fonction de p et de q la valeur de l'expression

$$\sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta) = 0.$$

(*Alger, 1876.*)

Les côtés opposés AB, CD de la base d'une pyramide quadrangulaire SABCD, se coupent en E, et les deux autres côtés en F, de telle sorte que les faces ASB, CSD se coupent suivant SE, et les faces ASD, BSC suivent SF.

Démontrer que toute section faite dans la pyramide par un plan parallèle à ESF est un parallélogramme. Déterminer le point M de SD pour lequel la section est équivalente à un carré donné. (*Lyon, 1876.*)

On donne un losange ABCD. Aux points A et C, extrémités d'une de ses diagonales, on élève des perpendiculaires données AE et CH, au plan du losange. Calculer le volume du tétraèdre DEHB. (*Poitiers, 1876.*)

Dans un triangle rectangle on connaît le périmètre et la surface. Calculer tous les éléments en fonction de ces quantités. (*Lille, 12 avril 1877.*)

Un carré dont le côté est a tourne autour d'un axe passant par un de ses sommets et parallèle à l'une de ses diagonales. On demande le volume engendré. (*Lille, 17 avril 1877.*)

1. — Étant donnée l'équation $x^2 - 2ax + 3a = 0$, quelle valeur doit-on donner à a pour que l'une des racines soit double de l'autre.

2. — On prépare du gaz ammoniac avec du chlorhydrate d'ammoniaque et de la chaux vive en excès. On recueille 10 litres de ce gaz à 30° sous la pression de 0,700. On demande le poids de chlorure de calcium formé dans cette réaction. L'équivalent du calcium est 20.

(*Caen, le 11 avril 1877.*)

La densité de l'acide carbonique est 1,53; celle de l'oxyde de carbone est 0,957. Quel est le poids du litre du mélange de ces deux gaz fait par parties égales à 10° sous une pression de 760. (*Caen, le 13 avril 1877.*)

Le récipient d'une machine pneumatique a une capacité de 10 litres; chaque corps de pompe a une capacité de 1 litre. Combien faudra-t-il de coups de piston pour que la pression descende de 750 millimètres à 10 millimètres. (*Caen, 13 avril 1877.*)

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR 1877.

Algèbre.

1. — On donne deux cercles tangents. Par le point de contact A, on mène une corde AC; puis, dans l'autre cercle une autre corde AB faisant avec la première un angle α. On demande de mener AC de manière que l'aire du triangle ABC soit maxima.

2. — On donne deux cercles tangents; par le point de contact, on mène dans l'un des cercles une corde AB, puis la corde AB' perpendiculaire à la première, dans l'autre cercle. On demande de mener AB de telle sorte que AB + AB' sont un maximum.

3. — Étant donnée une demi-circonférence limitée par un diamètre AB, trouver sur la circonférence un point C tel que si l'on mène CD parallèle à AB, on ait CD = 3CA.

4. — Étant donnée une demi-circonférence terminée par le diamètre AB, on mène le rayon OC, perpendiculaire à AB et la corde AC. Cela posé, on demande de trouver sur le diamètre AB un point P tel que si l'on mène la perpendiculaire PN au diamètre AB, et rencontrant la circonférence en M et la corde AC en N, on ait PM + PN = l.

5. — Quelles conditions doivent remplir les coefficients du polynome $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, pour que ce polynome soit le carré d'un trinome de la forme $x^2 + mx + n$.

6. — Trouver sur une demi-circonférence AMB un point M tel que 3AM + 2BM soit un maximum.

Équations.

1. — $\operatorname{Tg} x \operatorname{tg} 2x = m$.
2. — $\sin x \sin 3x = m$.
3. — $\cos 2x + 2\sin x = m$.
4. — $\sin x + \cos x + \sin 2x = 2$.
5. — $3\cos^2 x = 2\sin x \cos \alpha$.
6. — $\cos 3x = K \cos^3 x$.
7. — $\operatorname{Tg}(x + \alpha) = 3\operatorname{tg}(x - \alpha)$.

8. — Maximum ou minimum de $2\text{tg}\, x + 3\text{cotg}\, x$.

9. — $x^2 - 2x\, \text{tg}\, \alpha + 3 = 0$. Conditions de réalité lorsque α est aigu ; ou lorsque α est obtus.

10. — $\text{Tg}\,(x + 45°) - \text{tg}\, x = m$. Cas où $m = 1$.

11. — Maximum de $\sin A \sin B$ lorsque $A + B$ est constant.

12. — Maximum de $\sin^2 x + \sin^2 (x + \alpha)$, α étant un angle compris entre 0 et 90°.

Géométrie.

1. — Quel est le rapport entre les deux surfaces engendrées par la tangente menée du point A à un cercle et l'arc BMC compris entre le point de contact et le diamètre passant par le point A ?

2. — Quel est le rayon d'un cercle dans lequel on pourrait inscrire un hexagone équivalent à un triangle équilatéral donné ?

3. — Le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un triangle donné a pour bissectrices ces hauteurs.

4. — Dans un quadrilatère, la ligne qui joint les milieux de deux côtés opposés partage en deux parties égales la droite qui joint les milieux des diagonales.

Trigonométrie.

1. — Calculer : Sin $3a$ en fonction de sin a ; cos $3a$ en fonction de cos a. — Vérifier pour $a = 60°$.

2. — Trouver $\text{tg}\, \frac{a}{4}$ en fonction de cos a.

3. — On a : $\text{tg}\, a + \text{tg}\, b = 1$. Trouver la relation qui existe entre les angles a et b.

4. — Vérifier l'égalité :

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \text{tg}^2 \frac{\pi - 2a}{4}.$$

5. — Trouver le rayon d'une circonférence inscrite dans un secteur dont les éléments sont connus.

6. — Inscrire dans un secteur circulaire un rectangle semblable à un rectangle donné. Cas où ce rectangle est un carré.

7. On donne un triangle ABC ; on mène les hauteurs AD, CE ; calculer ED. — Partant du résultat trouvé, on demande de comparer le triangle DEF au triangle ABC.

8. — Résoudre un triangle connaissant a, A, $\frac{b}{c}$.

Mécanique.

1. — Étant donnés deux plans faisant les angles α, β avec l'horizontale, un corps glisse librement sur AB ; la hauteur $AC = h$. On demande jusqu'à quelle hauteur le corps remontera sur le second plan.

2. — Etant donné un pendule à l'extrémité duquel se trouve un poids de 10 kilog., on fait prendre au pendule une direction telle que le fil fasse avec la verticale un angle de 45°. On demande quelle sera la force horizontale qu'il faudra opposer à ce corps pour qu'il reste dans cette nouvelle position.

3. — Etant donnée une série de plans inclinés sur lesquels on fait glisser un corps et qui partent du même point A, on demande de prouver que ce corps arrive toujours au bout du même temps aux points de rencontre avec la circonférence décrite sur AD comme diamètre.

4. — On suppose qu'un corps tombe dans le vide sans vitesse initiale d'une hauteur h. On demande de partager cette hauteur h en trois parties telles que chacune de ces parties soit parcourue dans le même temps.

Divers.

Partager 60 en deux parties telles que les carrés de ces parties soient entre elles comme les nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$. Calculer l'une de ces parties à 0,01 près.

2. — Deux nombres a et b étant premiers entre eux, démontrer que $\frac{a+b}{ab}$ est une fraction irréductible.

3. — Trouver la limite vers laquelle tend

$$\frac{3}{7}+\frac{4}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\frac{4}{7^5}+\frac{2}{7^6}+\ldots\ldots$$

4. — Trouver la plus haute puissance de 7 qui divise le produit

$$1\times 2\times 3\times 4\times\ldots\ldots\times 49\times 50$$

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR — 1875.

Algèbre.

1. — m étant un nombre entier, dans quel cas la division de $x^m - a^m$ par $x^3 - a^3$ est-elle possible?

2. — Faire la division de $x^4 + 1$ par $x^2 + px + q$. Déterminer pour p et q des valeurs telles que la division soit possible.

3. — Trouver laquelle des deux quantités $\sqrt[n]{n}$ ou $\sqrt[n+1]{n+1}$ est la plus grande.

4. — Etant donnée l'équation $ax^2+bx+c=0$, former une autre équation dont les racines soient les carrés des racines de la proposée. — Conditions pour que les racines de l'équation trouvée soient égales.

5. — $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ est-il divisible par $a + b + c$? Déterminer x dans le polynôme $a^3 + b^3 + c^3 - xabc$ pour qu'il soit divisible par $a + b + c$.

6. — Vraie valeur, pour $x = 1$, de la fraction

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x+2}$$

7. — Vraie valeur, pour $a = b$, de l'expression

$$\frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{3(a-b)^2}$$

8. — Diviser $x^3 + ax^2 + bx - 3$ par $x^2 - x + 1$. Trouver les valeurs de a et de b pour lesquelles la division se fait exactement.

9. — Résoudre

$$x + y = a; \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = b.$$

Examiner le cas où $m = n$.

10. — Résoudre $x + ay = p$; $y + bx = q$.
Examiner le cas où $1 - ab = 0$.

11. — Résoudre $ax + by = m$; $a^2x + b^2y = n$.
Cas où $b = a$.

12. — Résoudre $ax + by = c$; $a^2x + b^2y = c$.
Supposer $a = b = c$.

13. — Résoudre $x + 2y = az$; $z + 2x = by$; $y + 2z = cx$.
D'où vient que $x = y = z = 0$ convient à ce système?

14. — Déterminer K de manière que les équations $x + y = K$, $ax + by = K^2$, $a^2x + b^1y = K^3$ soient compatibles.

15. — Etant donnés une circonférence O, et deux points A et B extérieurs à la circonférence, trouver sur cette ligne un point M tel que $AM^2 + BM^2 = a^2$. Discussion.

16. — On donne deux parallèles et deux points A et B sur l'une. Trouver sur l'autre un point M tel que MA = 2MB. Discussion.

17. — Etant donné un demi-cercle, mener une parallèle CD au diamètre AB de telle sorte que le périmètre du trapèze ACDB soit égal à une quantité donnée. Discussion.

18. — On donne un demi-cercle; par un point D, on mène une perpendiculaire DE au diamètre AB, et la corde AD. Trouver la position du point D telle que AD = EB.

19. — On a un triangle isoscèle ABC. Mener une parallèle ED à la base AB telle que $AE^2 + ED^2 + BD^2$ soit égal à un carré donné.

20. — Etant donné un demi-cercle, mener une corde AC telle que en abaissant CD perpendiculaire sur le diamètre AB et faisant tourner autour de AB, le volume du cône engendré par le triangle ACD soit maximum.

21. — On donne un point P dans l'intérieur d'un angle droit. Mener par ce point une sécante telle que la somme des segments interceptés sur les côtés de l'angle droit soit égale à une longueur donnée. Même question en supposant que le produit des segments doive être égal à un carré donné.

22. — On prend un point P sur la bissectrice d'un l'angle droit CAB; mener par le point P une droite CB telle que $PC^2 + PB^2 = K^2$. Discussion.

23. — On prend le milieu O d'une droite AB; au point B on élève une perpendiculaire à AB. Trouver sur cette perpendiculaire un point C tel que AO + OC soit égal à une longueur donnée. Discussion.

24. — Soit un trapèze ABCD. Mener par le point D une droite DM telle que le triangle DMC soit égal au quadrilatère ABMD. Quel sera le rapport des volumes engendrés dans la rotation du trapèze autour de DC.

Trigonométrie.

1. — x croissant jusqu'à 90°, vers quelle limite tend l'expression

$$(1 - \sin^2 x) \operatorname{tg} x.$$

2. — Trouver tg 75° sachant que tg 45° = 1; tg 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. — Si dans la formule

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

on fait $a + b = 30°$, le premier membre devient égal à $\frac{1}{2}$; prouver qu'il en est de même du second.

4. — Quelle est pour $x = 0$, la valeur de l'expression

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}.$$

Ne pourrait-on pas prévoir géométriquement que cette expression tend vers l'infini?

5. — Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et la somme m des côtés de l'angle droit.

6. — Dans un triangle rectangle on connaît chacune des sommes obtenues en augmentant l'hypoténuse d'un côté de l'angle droit.

Résoudre le triangle.

7. — Vraie valeur de l'expression $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{cotg} x}$, pour $x = 45°$.

8. — Résoudre un triangle connaissant A, a, et la différence $b - c = m$ des deux autres côtés. Peut-on voir à priori si le problème sera toujours possible?

9. — Résoudre un triangle connaissant la base a, l'angle opposé A, et la hauteur h.

10. — Résoudre un triangle connaissant les angles A, B, C et la somme $b + c$ de deux côtés.

11. — Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et le rayon du cercle inscrit ou circonscrit.

12. — Résoudre un triangle connaissant a, A et $b^2 + c^2$.

13. — Comment voit-on que dans la formule

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

cos A est compris entre $+1$ et -1?

14. — Résoudre un triangle connaissant un angle, le côté opposé et la somme des deux autres côtés.

15. — Si l'on fait $a + b = 45°$, prouver que $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = 1$. La réciproque est-elle vraie?

16. — Vraie valeur, pour $x = 90°$, de l'expression

$$\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x}.$$

17. — Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a.$$

18. — Quelle relation doit exister entre les côtés d'un triangle pour que le rayon du cercle circonscrit soit égal au triple du rayon du cercle inscrit?

19. — Etant donné le cercle inscrit dans le triangle ABC, on mène une tangente HK à ce cercle faisant des angles égaux avec AB et AC. Trouver la longueur de BH.

20. — Démontrer que l'on a identiquement

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°) = 0.$$

21. — Faire la somme de

$$\sin \alpha + \sin (90 + \alpha) + \sin (180 + \alpha) + \sin (270 + \alpha).$$

22. — Trouver pour $a = b$, la valeur de

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin \frac{a}{2} - \sin \frac{b}{2}}.$$

23. — Étant donnée l'égalité

$$\operatorname{tg} \frac{A + B}{2} . \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

en déduire $\cos A = \cos B \cos C$.

24. — Calculer, pour $a = 45°$, l'expression

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos 2a}{\cos a - \sin a}.$$

25. — Calculer l'angle x donné par la relation

$$\operatorname{tg} x = \cos 50° + \sin 50°.$$

26. — Calculer l'angle x donné par l'équation

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \sin a + \sin 2a}{2 \sin a - \sin 2a}$$

27. — Maximum de $\sin x + 3 \cos x$.

28. — On donne les angles d'un triangle ABC. On divise BC en 2 parties BD, DC, telles que l'on ait 2DC = BD. On joint le point A au point D. Déterminer les angles en A.

29. — Déterminer l'angle x formé par la formule

$$\sin x = \sin 6° + \sin 8° + \sin 10°.$$

30. — Vraie valeur, pour $a = 0$ de l'expression

$$\frac{\sin 3a}{\sin 2a}$$

31. — Calculer les hauteurs d'un triangle en fonction des côtés.

32. — Étant données deux droites rectangulaires et deux points B et C sur l'une d'elles, trouver sur l'autre un point A tel que l'angle CAB ait une valeur donnée.

33. — On donne un angle droit et un point sur chacun des côtés. Mener par le sommet une droite telle que la somme des projections des segments des axes sur cette droite sont maxima.

34. — Etant données deux droites rectangulaires CA et CD, et deux points A et B sur l'une d'elles, trouver sur l'autre un point D tel que $AD + DB = 2a$.

35. — Etant données deux droites parallèles AB, CD, leur distance, et deux points fixes A et B sur l'une d'elles, trouver sur l'autre un point K tel que $AK + KB = 2a$.

Équations trigonométriques.

$\sin x + 2 \sin^2 x = a.$

$\sin x - \sin^2 x = a.$

$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}.$

$\sin x \cos (30° - x) = m.$ Discuter.

$\text{Tg}\, x = 8 \cos x.$

$\text{Sin}\, x = 4 \cos x.$

$\text{Cos}\, x + \cos 2x = 1{,}1.$

$\text{Sin}\, x + 4 \cos x = 3.$

$\text{Tg}\, x + 2 \text{ cotg}\, x = m.$ Discuter.

$3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = m.$ Discuter.

$\text{Sin}\, x + 2 \cos^2 x = a.$ Discuter.

$a \text{ tg} x + b \text{ cotg}\, x = c.$ Discuter.

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\sin x} = a.$$

$\text{Tg}^4 x + 6 \text{ tg}^2 x + 1 = 0.$

$3 \sin x + 2 \cos x = m.$ Discuter.

$\text{Sin}\, x = \cos 2x.$

$\text{Tg}^2 x + 2a \text{ tg}\, x = 20.$

$\text{Cos}^4 x + 20 \cos^2 x = 12.$

$$\frac{\sin x}{\sin (30 - x)} = 2.$$

$\text{Sin}^2 x + \sin x = 1{,}5.$

Trouver les conditions pour qu'on puisse trouver une valeur de x satisfaisant à la fois aux deux équations

$$a \sin x + b \cos x = c$$
$$a \sin x + b' \cos x = c'.$$

$\text{Tg}\,(a + x) - \text{tg}\, x = m.$ Discussion.

$3 \sin x + 4 \cos x = 0.$

$$\text{Tg}\, x = \frac{1}{\sin 20^\circ} + \frac{1}{\sin 10^\circ}.$$

$\text{Tg}\, 2x = 0{,}625.$

$\text{Séc}^2 x = 5.$

$$\frac{\sin x}{\sin (a - x)} = \frac{2}{3}.$$

CONCOURS DE L'ÉCOLE CENTRALE

Compositions de mathématiques.

On place au commencement de chaque année pendant n années successives, une même somme a à intérêts composés, à raison de r pour 1 franc par an. Il est convenu qu'on sera remboursé au moyen d'une annuité x payée au commencement de chaque année pendant les $3n$ années qui suivront les n premières.

Calculer cette annuité.

Appliquer la formule obtenue aux valeurs suivantes

$$a = 10000; \quad n = 10; \quad r = 0{,}05$$

(Août 1864.)

Soit O le centre d'un cercle, R le rayon, AI la tangente en A; sur cette tangente, on prend d'un même côté du point A deux points B et B′ tels que

1° Le produit des distances AB, AB′, soit égal à $2R^2$;

2° Le rapport de la surface du triangle ACC′ qui a pour sommet le point A et les points de contact des deux tangentes menées des points B et B′, soit égal au nombre donné *m*.

Calculer les longueurs OB et OB′ et discuter le problème *(Août 1864.)*

On donne dans un triangle ABC

$$a = 2597^{m},\ 85$$
$$A = 56^{\circ}\ 12'\ 47''$$
$$b = 3084^{m},\ 33$$

Résoudre ce triangle : on cherchera à donner une vérification des calculs effectués. *(Août 1864.)*

On donne un triangle ABC rectangle en A et isoscèle. P étant un point pris dans le plan de ce triangle, on mène la droite BP qui coupe en un certain point D le côté AC prolongé s'il le faut. Sur BD on prend un point R tel que

$$\frac{BP}{PR} = K.\frac{DP}{DR}$$

K étant une constante donnée. On demande :

1° De trouver le lieu du point R, lorsque le point P parcourt le cercle décrit sur AC comme diamètre.

2° De trouver le lieu des positions successives qu'occupe le centre du lieu précédent, lorsqu'on fait varier le paramètre K. *(Août 1864.)*

Calculer à moins de 0,001 et sans le secours des logarithmes, la raison d'une progression géométrique, sachant que le premier terme est 1 et le treizième égal à 10. Toutes les opérations seront détaillées sur la copie. *(Octobre 1864.)*

Calculer la hauteur d'un cône droit, inscrit dans une sphère de rayon R sachant que le double de la surface laté-

rale augmenté de la surface de sa base, est égal à la surface de la sphère considérée. *(Octobre 1864.)*

Calculer les angles et la surface d'un triangle dont les trois côtés sont

$$a = 0{,}145672$$
$$b = 0{,}074389$$
$$c = 0{,}095674$$

(Octobre 1864.)

Étant donnée une ellipse dont F est l'un des foyers et 0 le centre, on décrit un cercle sur le grand axe comme diamètre. Une perpendiculaire au grand axe rencontre l'ellipse au point P et le cercle au point Q. On mène les droites FP F'Q qui se rencontrent en M.

On demande le lieu des points M lorsque la droite PQ se transporte parallèlement à elle-même. *(Octobre 1864.)*

Calculer les côtés d'un triangle rectangle sachant que

1° Le périmètre du triangle est égal à 2/3;

2° La somme des volumes engendrés par le triangle en tournant successivement autour des deux côtés de l'angle droit, équivaut à la moitié d'une sphère de rayon R. On discutera le problème. *(Août 1865.)*

Résoudre un triangle dans lequel on connaît

$$A = 1^\circ\ 25'\ 18'',\ 42$$
$$C = 4^\circ\ 20'\ 15'',\ 47$$
$$b = 0^m,\ 07379216$$

(Août 1865.)

On donne une parabole et un point fixe dans son plan. Un angle droit se meut dans le plan de la courbe de manière que le sommet de cet angle décrive la directrice de la parabole et que l'un de ses côtés passe constamment par le point fixe donné. On demande le lieu des milieux des cordes interceptées par la parabole sur l'autre côté de l'angle. Lorsque la position du point fixe varie, le lieu obtenu se modifie.— Quelle ligne décrit le sommet de ce lieu, lorsque le point fixe se meut sur une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole donnée? *(Août 1865.)*

Dans un cône droit à base circulaire, dont la section principale est un triangle équilatéral d'un mètre de côté, on inscrit une première sphère tangente au plan de la base, puis une deuxième sphère de rayon moindre tangente à la

première, puis une troisième sphère de rayon moindre, tangente à la deuxième, et ainsi de suite. On demande :

1° La somme des volumes des dix premières sphères ainsi obtenues;

2° La limite vers laquelle tend la somme des volumes des sphères ainsi obtenues, quand leur nombre croît au delà de toute limite. *(Octobre 1865.)*

On donne le volume v et la hauteur h d'un tronc de pyramide dont les bases parallèles sont des hexagones réguliers. On connaît en outre le côté a de la base inférieure et l'on demande de calculer le côté x de la base supérieure.

Discussion et interprétation des solutions négatives. Application numérique pour $a = 1^m$,

$$h = 1^m \times \sqrt{3}$$
$$v = 2^{mc}$$

(Octobre 1865.)

Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris :

$$b = 24345,74$$
$$c = 54652,85$$
$$A = 8^\circ\ 24'\ 34''$$

(Octobre 1865.)

On donne une circonférence O et deux points fixes E et F dans le plan de la circonférence; puis deux diamètres rectangulaires OA et OB de la circonférence.

On mène à cette circonférence une tangente quelconque CD qui coupe respectivement les diamètres en C et en D; on joint le point C au point fixe E, et le point D à l'autre point fixe F, et on demande le lieu des intersections des droites telles que CE et DF.

Étudier séparément ce lieu, 1° lorsque le point E s'éloigne à l'infini dans la direction OB et le point F dans la direction OA; 2° lorsque les trois points E, F, O, sont en ligne droite. *(Octobre 1865.)*

On donne dans un triangle ABC les trois côtés :

$$a = 1402,448$$
$$b = 876,53$$
$$c = 1227,142$$

Calculer

1° Les angles A, B, C et la surface S du triangle; 2° L'aire comprise entre les cercles inscrit et circonscrit à ce triangle.

(Août 1866.)

Démontrer que lorsqu'une conique passe par les quatre sommets d'un parallélogramme, elle admet un système de diamètres conjugués parallèles aux côtés de ce parallélogramme.

On donne un angle droit xoy et une droite fixe AB, dans son plan. D'un point quelconque M pris sur cette droite AB on abaisse les perpendiculaires MP et MQ sur les droites ox et oy, et on fait passer par les quatre sommets du rectangle OPMQ une hyperbole équilatère.

On demande le lieu décrit par les sommets de cette hyperbole équilatère, quand le point M parcourt la droite donnée AB. *(Août 1866.)*

Connaissant deux côtés a et b d'un triangle et l'angle compris C, calculer les deux autres angles, le troisième côté, la surface et le rayon du cercle ex-inscrit compris dans l'angle C. On supposera :

$$a = 4565^{m},72$$
$$b = 983^{m},45$$
$$C = 75^{\circ}\,23'\,54'' \qquad \textit{(Octobre 1866.)}$$

On donne un triangle ABC. D'un point quelconque P, pris sur le côté AB, on abaisse PQ perpendiculaire sur AC; on mène les droites BQ et CP qui se coupent au point M. 1° On demande le lieu de ce point M quand le point P parcourt la droite indéfinie AB; 2° Les droites indéfinies AB et AC restant fixes, on fait tourner la droite BC autour d'un point fixe I pris sur cette droite, et on demande le lieu du centre du lieu précédent. *(Octobre 1866.)*

On demande de calculer les angles et l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés

$$a = 2141,79$$
$$b = 2847,14$$
$$c = 3217,25 \qquad \textit{(Août 1867.)}$$

On donne deux droites parallèles AL, A'L', une droite AA' perpendiculaire à ces parallèles et un point P situé sur AA'. Par ce point P on mène une droite quelconque rencontrant les parallèles AL, A'L' aux points B, B'; par les 4 points A, A', B et B' on fait passer une hyperbole équilatère et l'on demande

1° Le lieu des centres de ces hyperboles quand la droite PBB′ tourne autour du point P;

2° Le lieu des points de contact des tangentes à ces hyperboles équilatères parallèles à la droite AL et le lieu des points de contact des tangentes parallèles à AA′;

3° Étant donnée une position particulière de la droite PBB′, construire géométriquement les asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par les 4 points A,B,A′,B′, et reconnaître si les points A et B appartiennent à la même branche ou aux branches différentes de cette hyperbole. *(Août 1867.)*

On donne 2 côtés d'un triangle et l'angle compris

$$a = 456^{m},742$$
$$b = 121^{m},847$$
$$c = 54^{\circ}\ 28'\ 45''$$

Calculer les 2 autres angles, le 3e côté et la surface. *(Octobre 1867.)*

On donne le foyer et la directrice d'une ellipse d'excentricité variable. Par le foyer, on mène une droite dont l'angle avec la directrice a pour sinus l'excentricité. Trouver et construire le lieu des points d'intersection de cette droite avec l'ellipse variable. *(Octobre 1867.)*

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Trouver la projection horizontale et la projection verticale de l'intersection de deux cônes A et B définis de la manière suivante :

La base du cône A est un cercle horizontal dont le centre est situé sur la ligne de terre et dont le rayon est de $0^{m},05$. Son sommet élevé de $0^{m},20$ au-dessus du plan horizontal se projette horizontalement sur l'un des points où le cercle de base coupe la ligne de terre.

La base du cône B est aussi un cercle horizontal ayant le même centre que le premier et un rayon double. Son sommet a la même projection horizontale que le sommet du cône A et une hauteur de $0^{m},10$ au-dessus du plan horizontal.

Dans la mise à l'encre, on indiquera la construction pour un seul point et on déterminera les projections de la tangente en ce point. *(1864.)*

Construire le cône circonscrit à une sphère de $0^m,03$ de rayon, sachant que l'axe de ce cône fait respectivement des angles de 30° et de 60° avec les plans de projection et que la distance du sommet du cône au centre de la sphère est de $0^m,045$.

On déterminera les projections de la courbe de contact et les traces du cône sur les deux plans de projection. *(1864.)*

Par un point A, situé à $0^m,05$ de chacun des plans de projection, on mène une verticale et une parallèle à la ligne de terre.

La droite verticale est l'axe d'un cône de révolution dont le sommet P est à $0^m,06$ au-dessus du point A et dont la section par un plan mené perpendiculairement à l'axe par le point A est un cercle de $0^m,03$ de rayon.

La droite parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un autre cône de révolution dont le sommet Q est à $0^m,11$ à gauche du point A et dont la section par un plan mené perpendiculairement à l'axe par le point A est un cercle de $0^m,03$ de rayon.

On demande :

1° De représenter les deux cônes en projections horizontale et verticale;

2° De tracer les projections horizontale et verticale de l'intersection des deux corps et de mener la tangente en un point de cette intersection. *(1865.)*

Déterminer l'intersection de deux cylindres de révolution de même rayon R et dont les deux axes se rencontrent en un point M, dans les conditions suivantes : $R = 0^m,10$.

Distance du point M à la ligne de terre $0^m,20$,

— — au plan horizontal $0^m,15$.

Les deux axes sont perpendiculaires à la ligne de terre, et chacun d'eux fait avec le plan horizontal un angle de 45°.

Développer la partie de l'une des surfaces cylindriques comprise entre le plan horizontal et l'intersection.

(1865.)

On donne dans le plan horizontal :

1° Un point S situé à $0^m,07$ de la ligne de terre;

2° Deux droites, l'une SS′ perpendiculaire à la ligne de terre, l'autre SA inclinée à 45° sur la ligne de terre.

La droite SA est l'axe d'un cylindre de révolution dont le rayon a $0^m,04$.

La droite SS′ est l'axe d'un cône de révolution dont SA est une génératrice.

On demande de trouver la projection horizontale et la projection verticale de l'intersection du cône et du cylindre.

Dans la mise à l'encre, on tracera les lignes de construction nécessaires pour obtenir un point quelconque de la courbe et la tangente en ce point. *(1866.)*

On donne dans le plan horizontal un triangle *abc* dont les côtés ont pour longueurs $ab = 0^m,10$, $bc = 0^m,06$, $ac = 0^m,08$. La droite *ab* est parallèle à la ligne de terre et le point *c* est situé entre ces deux parallèles à égale distance de chacune d'elles. Ce triangle *abc* est la projection d'un triangle ABC situé dans le plan horizontal élevé de $0^m,05$ au-dessus du plan horizontal de projection. Le point *c* est le centre d'une sphère dont le rayon a $0^m,03$. Le point B est le sommet d'un cône circonscrit à cette sphère; et la droite AC est l'axe d'un cylincre circonscrit à la même sphère. On demande 1° de construire la projection horizontale et la projection verticale de l'intersection du cône et du cylindre; 2° de représenter le cône avec son entaille, en le limitant d'une part à son sommet et de l'autre au plan vertical, et en supposant le cylindre enlevé. Quant aux lignes de construction, on ne mettra à l'encre que celles qui sont nécessaires pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point. *(1866.)*

On donne une sphère tangente aux deux plans de projection et ayant $0^m,05$ de rayon. Par le point le plus haut de cette sphère on mène une parallèle à la ligne de terre.

Cette parallèle est l'axe d'un cylindre de révolution ayant un rayon égal à celui de la sphère.

Trouver les projections de l'intersection de la sphère et du cylindre.

Dans la mise à l'encre, on supposera que la sphère existe seule, qu'elle est pleine et qu'on a enlevé la portion comprise dans le cylindre, on mettra des hachures sur les parties coupées visibles; on indiquera les constructions nécessaires pour obtenir un point quelconque de la ligne d'intersection et la tangente en ce point. *(1867.)*

On donne : 1° deux points A et B situés sur la ligne de terre; AB = 9 centimètres.

2° Deux points A′ et B′ situés l'un A′, sur la verticale du point A et à $0^m,09$ au-dessus du plan horizontal de projection; l'autre B′, sur la verticale de B et à $0^m,18$ au-dessus du même plan horizontal.

Le point A′ est le centre d'un cercle qui a $0^m,03$ de rayon, qui est situé dans le plan horizontal de projection et qui est la base d'un cône dont le sommet est en B′. Le point B est le centre d'un cercle qui a $0^m,06$ de rayon, qui est situé dans le plan horizontal de projection et qui est la base d'un cône dont le sommet est en A′. On demande de trouver la projection horizontale et la projection verticale de l'intersection de ces deux cônes.

Dans la mise à l'encre, on supposera les deux cônes pleins et l'on indiquera les constructions nécessaires pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en un point. On expliquera succinctement ces constructions à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure. *(1867.)*

CONCOURS ACADÉMIQUE DE DOUAI 1876.

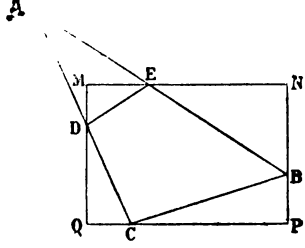
Solution par M. Joire, élève du Lycée de Saint-Omer.

Dans un quadrilatère BCDE *on connaît les trois côtés* DC, CB, EB *et l'angle* A *formé par les côtés* CD *et* BE *prolongés, calculer le quatrième côté* DE.

Donner la condition que doit remplir ce quadrilatère pour que tous les rectangles qu'on lui circonscrira soient semblables.

1° Posons EB $= b$, BC $= c$, DC $= a$, AE $= x$, AD $= y$, DE $= d$.

Dans le triangle ABC, on a



$$\frac{b+x}{\sin C} = \frac{a+y}{\sin B} = \frac{c}{\sin A}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c \sin C}{\sin A} - b \\ y &= \frac{c \sin B}{\sin A} - a \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Le triangle ADE donne

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$$

ou en remplaçant x^2 et y^2 par leurs valeurs tirées de (1) on a, en remarquant que

$$\sin^2 A = \sin^2 C + \sin^2 B - 2 \sin C \sin B \cos A$$

et en simplifiant

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos A$$
$$- \frac{2c}{\sin A}\left[b(\sin C - \sin B \cos A) + a(\sin B - \sin C \cos A)\right]$$

Mais $\sin C - \sin B \cos A = \sin A \cos B$

de même $\sin B - \sin C \cos A = \sin A \cos C$

donc $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos A - 2ac \cos C - 2bc \cos B$

2° Soit MNPQ un rectangle circonscrit au quadrilatère. On a en désignant par β et γ les angles NBE, BCP.

$$PN = PB + BN = c \sin \gamma + b \cos \beta$$
$$PQ = PC + QC = c \cos \gamma - a \cos (C + \gamma)$$

De plus $A + \beta + 90 - \gamma = 180°$

d'où $\beta = 90° + \gamma - A.$

Pour que le rectangle reste toujours semblable à lui-même, il faut que $\frac{PN}{PQ}$ ou

$$\frac{c \sin \gamma + b \sin (A - \gamma)}{c \cos \gamma - a \cos (C + \gamma)} = \text{constante.}$$

ou que $\frac{b \sin A + (c - b \cos A) \operatorname{tg} \gamma}{c - a \cos B) + a \sin B \operatorname{tg} \gamma} = \text{constante}$, quelque soit l'angle γ.

Le premier membre sera constant si

$$\frac{b \sin A}{c - a \cos B} = \frac{c - b \cos A}{a \sin B}$$

c'est-à-dire si

$$ab \sin A \sin B = c^2 - bc \cos A - ac \cos B + ab \cos A \cos B$$

d'où $\quad c^2 = ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A.$

Si l'on veut introduire la valeur de d dans cette expression, on aura $\quad c^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{2}$

et la condition cherchée sera

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

Nota. — M. A. T., du lycée de Saint-Omer, a résolu la même question.

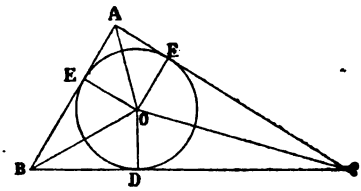
CONCOURS ACADÉMIQUE DE DIJON 1876.

Solution de la 2me question par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Construire et calculer un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

On a d'après la figure AE = AF = r. D'autre part les tangentes CF et CD sont égales; il en est de même de BE et BD; donc

$$b + c = BD + DC + 2r = a + 2r:$$



on connaît dès lors un angle, le côté opposé a et la somme $b + c$ des deux autres côtés; le triangle est dans ce cas facile à construire.

SOLUTION ALGÉBRIQUE.

Posons $\quad b + c = n \quad$ (1)

On a en outre $\quad b^2 + c^2 = a^2 \quad$ (2)

Tirant la valeur de b de l'équation (1) et la portant dans (2) on a $\quad 2c^2 - 2cn + n^2 - a^2 = 0$

équation qui donne

$$c = \frac{n \pm \sqrt{2a^2 - n^2}}{2}$$

Connaissant c, il facile de trouver b et les angles du triangle.

QUESTIONS PROPOSEÉS

aux Candidats de l'École Centrale

par M. de Longchamps.

1. — Un cercle de rayon invariable roule sur une droite; d'un point fixe O, pris sur cette droite, on mène une tangente à la circonférence. Trouver le lieu du point de contact.

2. — On a un cercle fixe, un point O est pris sur la circonférence; on mène une corde quelconque par le point O; on joint l'extrémité C de cette corde au centre A du cercle, et on élève au point A une perpendiculaire à AC. Cette perpendiculaire rencontre OC en un point I, dont on demande le lieu.

3. — Soit OA un diamètre fixe d'un cercle donné, OB la tangente à ce cercle au point O, C un point mobile sur ce cercle; la tangente en C rencontre en B la tangente au point O. On joint le point B au centre, et du point C on abaisse une perpendiculaire sur OA. Ces deux droites se rencontrent en un point I, dont on demande le lieu.

4. — On a une ellipse; soit AA′ son grand axe, A′B, AC les deux tangentes aux extrémités de cet axe. On mène à l'ellipse une tangente quelconque qui rencontre les tangentes précédentes aux points B et C. On joint le point B au centre de l'ellipse, et du point C, on abaisse une perpendiculaire sur la droite BO. Le pied I de cette perpendiculaire décrit un cercle.

5. — On donne un cercle de centre O; soit A un point fixe de ce cercle, AB une corde mobile. Le point de concours des hauteurs du triangle OAB décrit une strophoïde.

QUESTIONS PROPOSÉES.

62. — Construire deux cercles connaissant le triangle formé par l'axe radical, une tangente commune intérieure et une tangente commune extérieure. *(Weill.)*

63. — Reconnaître que les trois équations

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + c = 0; \quad \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + c = 0;$$
$$(b + c)x + (a + c)y + (a + b) = 0$$

sont compatibles. *(de Longchamps.)*

64. — Résoudre le système

$$x + y + z = 1;$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1;$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1.$$ *(de Longchamps.)*

65. — Lorsque la hauteur d'un cône circonscrit à une sphère est double du diamètre de la sphère, la surface totale est aussi double de la surface de la sphère, et le volume du cône est double du volume de la sphère.

66. — De toutes les sphères qui ont leur centre sur la surface d'une sphère donnée, de rayon R, quelle est celle dont la calotte interceptée par cette sphère donnée a la plus grande surface? $r = \frac{4}{3}R$. *(Martus.)*

67. — Trouver trois nombres en progression arithmétique ayant r pour raison, dont la somme égale le produit. — Application au cas où $r = 1$. *(Émile Hain.)*

68. — Dans tout cône, la surface latérale s, la surface totale S et le volume V sont liés par la relation

$$9\,\pi V^2 = S(S - s)\,(2s - S).$$

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 13690-7.

ÉVALUATION DES ANGLES

ET DES SURFACES

Des polygones égrédients et des polygones étoilés,

par Georges Dostor.

---

1. *Polygones égrédients.* — Nous donnerons, en général, le nom de *polygone égrédient* à tout polygone plan, composé alternativement d'angles saillants et d'angles rentrants, qui sont tels que les côtés de ces angles sont situés deux par deux en ligne droite.

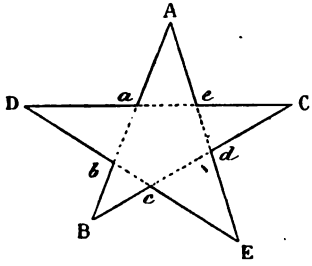


Fig. 1.

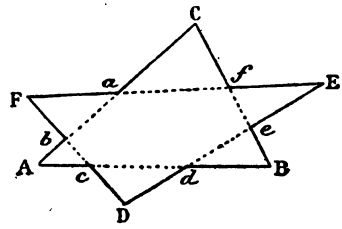


Fig. 2.

Tels sont les polygones ABCDE (fig. 1) et ABCDEF (fig. 2).

2. Remarque I. — Chaque côté d'un polygone égrédient joint les sommets des deux angles saillants, en passant par les sommets des deux angles rentrants qui leur sont contigus.

Ainsi, dans le polygone égrédient ABCDE (fig. 1), la droite AB, joignant les sommets des angles saillants A et B, en passant par les sommets *a* et *b* des deux angles rentrants contigus, est un côté du polygone.

De même, dans le polygone ABCDEF (fig. 2), les droites AB, EF sont des côtés.

3. Remarque II. — *Un polygone égrédient a autant de côtés que d'angles saillants ou que d'angles rentrants.*

Quand il sera question des sommets ou des angles d'un

polygone égrédient, nous n'entendrons parler que des angles saillants de ce polygone, abstraction faite des angles rentrants, à moins d'avis contraire.

4. *Sommets à droite et sommets à gauche de chaque côté d'un polygone égrédient.* — Il est évident que, si l'on parcourt dans le même sens le contour ou les côtés d'un polygone égrédient, on trouvera un même nombre p de sommets à droite de chaque côté du polygone, et aussi un même nombre q de sommets à gauche de chaque côté; de plus, si n désigne le nombre des côtés de ce polygone, on aura toujours (I) $n = p + q + 2$

Dans le *pentagone égrédient* ABCE (fig. 1), en supposant $p < q$, on a $p = 1,\ q = 2$;
et dans *l'hexagone égrédient* ABCDEF (fig. 2), on a

$$p = 1,\ q = 3.$$

5. *Espèce d'un polygone égrédient.* — Un polygone égrédient est dit de *l'espèce e*, lorsque le plus petit p des deux nombres p et q est égal à

$$e - 1, \text{ ou que } e = p + 1.$$

6. *Polygones de première espèce.* — Si l'un des deux nombres p et q est nul, p par exemple, l'autre q sera égal à $n - 2$, d'après (I), et l'on aura

$$e = 1;$$

dans ce cas, le polygone sera convexe. Donc

Les polygones convexes sont de première espèce;

Les angles rentrants y sont égaux chacun à deux angles droits.

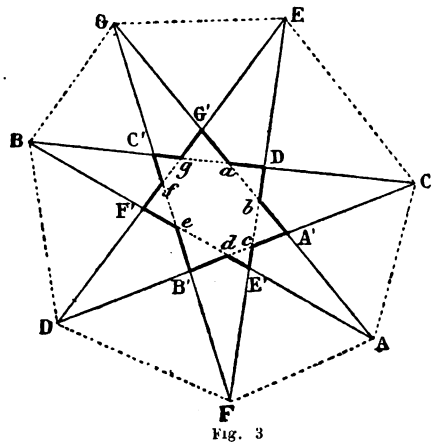


Fig. 3

7. *Génération des polygones égrédients.* — Au moyen d'un polygone convexe *abcde...* (fig. 3) de n côtés, on peut former tous les polygones des diverses espèces, ayant tous n côtés.

Le polygone convexe *abcd*... est de *première espèce.*

8. *Formation des polygones de deuxième espèce.* — Pour obtenir le polygone de deuxième espèce, ayant n côtés, en suivant dans le même sens le périmètre du polygone convexe *abcd*..., on prolonge les côtés de deux en deux, jusqu'à leurs intersections mutuelles.

Ainsi les côtés *ab* et *cd* se coupent en A'; les côtés *cd* et *ef* se rencontrent en B'; les côtés *ef* et *ga* se coupent en C'; les côtés *ga* et *be* en D'; *be* et *de* en E'; et ainsi de suite.

9. *Génération des polygones de troisième espèce.* — On obtient le polygone de troisième espèce, ayant n côtés, en prolongeant de trois en trois les côtés du polygone convexe de n côtés jusqu'à leurs intersections mutuelles.

Ainsi les côtés *ab* et *de* (fig. 3) se coupent en A; les côtés *de* et *ga* se rencontrent en B; *ga* et *ed* se coupent en C; *ed* et *fg* en D; et ainsi de suite.

10. *Formation des polygones d'une espèce supérieure à la troisième.* — On obtiendra les polygones de n côtés, qui sont d'une espèce supérieure à la troisième, en prolongeant les côtés des polygones convexes de n côtés, de 4 en 4, de 5 en 5..., de $\frac{n-2}{2}$ en $\frac{n-2}{2}$ ou de $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair.

11. *Nombre d'espèces de polygones de* n *côtés.* — On voit, d'après ces constructions, qu'*il y a autant d'espèces de polygones de* n *côtés; qu'il existe de nombres entiers inférieurs à la moitié de* n *ou de* n + 1, *suivant que* n *est pair ou impair.*

La première espèce de ces polygones est toujours le polygone convexe de n côtés.

Ainsi il y a

2 espèces de pentagones et 2 espèces d'hexagones,

3 espèces d'heptagones et 3 espèces d'octogones,

4 espèces d'ennéagones et 4 espèces de décagones, et ainsi de suite.

12. *Autre mode de génération des polygones égrédients.* — Il est aisé de s'assurer que le polygone, ayant n côtés, qui est de l'espèce p, peut aussi s'obtenir au moyen du poly

gone, ayant n côtés, qui est de l'espèce $p - 1$, en prolongeant dans ce dernier les côtés de deux en deux, dans les deux sens.

On pourrait encore former le polygone, ayant n côtés, qui est de l'espèce p, en prolongeant, de trois en trois et dans les deux sens les côtés du polygone, ayant n côtés, qui est de l'espèce $p - 2$.

Ainsi le polygone ABCDEFG (fig. 3) s'obtient aussi en prolongeant de deux en deux, dans les deux sens, les côtés du polygone A'B'C'D'E'F'G' de l'espèce immédiatement inférieure d'une unité.

En effet, les côtés A'B' et C'D' se coupent en C; les côtés C'D' et E' F' se rencontrent en B; E'F' et G'A' se coupent en A; G'A' et B'C' en G; B'C' et D'E' en F; D'E' et P'G' en E; F'G' et A'B' en D.

13. *Angles saillants et angles rentrants de deux polygones d'un même nombre de côtés, mais d'espèces consécutives.* — D'après ce dernier mode de génération, on voit que

Les sommets des angles saillants du polygone d'une espèce quelconque sont les sommets des angles rentrants du polygone de l'espèce immédiatement supérieure, qui est issu du même polygone convexe.

Dans le polygone A'B'C'D'E'F'G' (fig. 3), les sommets A', B', C',... des angles saillants sont les sommets des angles rentrants du polygone ABCDEFG de l'espèce immédiatement supérieure.

Ces deux polygones sont d'ailleurs issus du même polygone convexe *abcdefg*, qui, comme eux, est terminé par n côtés.

14. Théorème I. — *La différence des angles saillants de deux polygones égrédients, ayant le même nombre de côtés, mais étant de deux espèces consécutives, est constante et égale à quatre angles droits.*

Désignons par $S_{n,p-1}$ et $S_{n,p}$ les sommes des angles saillants de deux polygones d'espèces consécutives de n côtés A'B'C'... et ABC... (fig. 3), que nous supposerons l'un de l'espèce $p - 1$ et l'autre de l'espèce p.

Tirons les droites AF, FD, DB,... : nous formons un poly-

gone convexe de n côtés AFDB.... Sur les côtés de ce polygone s'appuient les n triangles AFE', FDB', DBF',... dont les angles au sommet E', B', F',.... sont égaux aux angles saillants du polygone de l'espèce $p - 1$. Nous avons donc.

$S_{n,p-1} = 2n$ droits — (E'AF + E'FA + B'FD + B'DF +...). Or la somme des angles entre parenthèses égale la somme des angles du polygone convexe AFDB.... de n côtés, moins la somme des angles saillants du polygone égrédient ABCD... de l'espèce p ; et égale par suite

$2(n - 2)$ droits — $S_{n,p} = 2n$ droits — 4 droits — $S_{n,p}$.

On a donc

$S_{n,p-1} = 2n$ droits — ($2n$ droits — 4 droits — $S_{n,p}$), ou

$S_{n,p-1} = 2n$ droits — $2n$ droits + 4 droits + $S_{n,p}$ d'où on tire

(II) $S_{n,p-1} - S_{n,p} = 4$ angles droits ;

ce que l'on voulait prouver.

15. Corollaire. — *Dans tout polygone égrédient, la différence entre la somme des angles rentrants et celle des angles saillants est constante et égale à quatre angles droits.*

16. Théorème II. — *Dans tout polygone de* n *côtés et de l'espèce* p, *la somme* $S_{n,p}$ *des angles* (angles saillants), *est égale à autant de fois deux droits qu'il y a d'unités dans le nombre* n *de côtés diminué du double nombre* 2p *de l'espèce,* c'est-à-dire que

(III) $S_{n,p} = 2(n - 2p)$ angles droits

En effet, l'égalité (II) nous donne.

$$S_{n,p} = S_{n,p-1} - 4 \text{ angles droits.}$$

Si nous attribuons à p successivement les valeurs

$$2, 3, \ldots, p-1, p$$

et que nous observions que

$$S_{n,1} = (2n - 4) \text{ angles droits,}$$

nous aurons la suite des relations

$$S_{n,1} = 2n \text{ droits} - 4 \text{ angles droits,}$$
$$S_{n,2} = S_{n,1} - 4 \text{ angles droits,}$$
$$S_{n,3} = S_{n,2} - 4 \text{ angles droits,}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{n,p-1} = S_{n,p-2} - 4 \text{ angles droits,}$$
$$S_{n,p} = S_{n,p-1} - 4 \text{ angles droits.}$$

Ajoutant ces égalités membres à membres et réduisant, nous trouvons pour $S_{n,p}$ la valeur

$$S_{n,p} = 2n \text{ angles droits} - 4p \text{ angles droits},$$

laquelle peut s'écrire

$$S_{n,p} = 2\,(n - 2p) \text{ angles droits};$$

ce qu'il fallait établir.

17. Corollaire. — Si n est pair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre

$$\frac{n-2}{2};$$

par suite, on aura

(IV) $S_{n,\frac{1}{2}(n-2)} = 2\,[n - (n - 2)]$ droits $= 4$ angles droits.

Si n est impair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\dfrac{n-1}{2}$;

par suite, il viendra

(V) $S_{n,\frac{1}{2}(n-1)} = 2\,[n - (n - 1)]$ droits $= 2$ angles droits.

On en conclut que

La somme des angles du polygone égrédient de l'espèce la plus élevée, parmi ceux d'un même nombre de côtés, est égale à quatre angles droits ou égale à deux angles droits, suivant que le nombre des côtés du polygone est pair ou impair.

Ainsi la somme des angles du triangle, celle des angles du pentagone de 2me espèce, ou de l'heptagone de 3me espèce, de l'ennéagone de 4me espèce, etc., est la même et toujours égale à deux angles droits.

18. Théorème III. — *Dans tout polygone égrédient, la somme des angles extérieurs, que l'on obtient en prolongeant tous les côtés dans le même sens, est égale à autant de fois quatre angles droits, qu'il y a d'unités dans l'espèce du polygone égrédient.*

En effet, la somme des angles, tant extérieurs que saillants, est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de sommets ou de côtés; mais, si le polygone, supposé de n côtés, est de l'espèce p, la somme des angles saillants sera (n° 16)

$$S_{n,p} = 2(n - 2p) \text{ angles droits}.$$

On a, par suite, pour la somme S_p des angles extérieurs,

$S_p = 2n$ angles droits $- 2(n - 2p)$ angles droits,

ou $S_p = (2n - 2n + 4p)$ angles droits.

Donc il vient

(VI) $S_p = p$ fois 4 angles droits.

Ainsi, dans le pentagone de 2me espèce, la somme des angles extérieurs est égale à huit angles droits.

19. *Polygones égrédients réguliers.*—Supposons que les côtés du polygone égrédient soient égaux entre eux et qu'il en soit de même des angles.

Puisque les n angles saillants sont égaux entre eux et valent ensemble $(2n - 4p)$ angles droits, chacun d'eux vaudra $\left(2 - \frac{4p}{n}\right)$ d'angle droit.

De même, les n angles rentrants étant égaux entre eux et valant ensemble $[2n - 4(p - 1)]$ angles droits, chacun d'eux sera égal à $\left[2 - \frac{4(p-1)}{n}\right]$ d'angle droit.

Ainsi

Théorème IV. — *Dans un polygone égrédient régulier de* n *côtés et de l'espèce* p,

1° Chaque angle saillant est égal à l'excès de deux angles droits sur $\frac{4p}{n}$ *d'angle droit;*

2° Chaque angle rentrant est égal à l'excès de deux angles droits sur $\frac{4(p-1)}{n}$ *d'angle droit.*

20. La différence entre ces deux angles est

$$\left[2 - \frac{4(p-1)}{n}\right] - \left(2 - \frac{4p}{n}\right) = \left(2 - \frac{4p}{n} + \frac{4}{n} - 2 + \frac{4p}{n}\right)$$ d'angle droit ou $\frac{4}{n}$ d'angle droit. Donc on peut dire:

Corollaire. — *Dans tout polygone égrédient régulier de* n *côtés, la différence entre un angle rentrant et un angle saillant est indépendante de l'espèce du polygone et vaut la* nme *partie de quatre angles droits.*

(A suivre.)

ÉTUDES SUR LES MAXIMA ET MINIMA

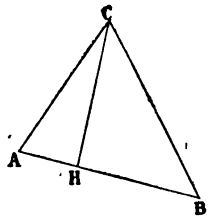
par M. Cochez *(suite et fin)*.

(Voir p. 232.)

APPLICATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

Problème VIII. — *Parmi les triangles de même base et de même hauteur, quel est celui dans lequel la somme des deux autres côtés est minimum?*

Appelons x et y les angles à la base du triangle et h la hauteur. La somme des côtés sera exprimée par



$$\frac{h}{\sin x} + \frac{h}{\sin y}.$$

D'un autre côté, $AH = h \operatorname{cotg} x$

$BH = h \operatorname{cotg} y;$

d'où $AH + BH = h(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y),$

ou $$\frac{b}{h} = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y \qquad (1).$$

Le problème est alors ramené au suivant :

La somme cotg x + *cotg* y *étant consante, trouver le minimum de*

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin y} \qquad (2).$$

Remplaçant dans l'expression (2) les sinus par les cotangentes, on a à rendre minimum l'expression

$$\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x} + \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 y},$$

qui, en vertu de (1), devient

$$\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h} - \operatorname{cotg} x\right)^2}.$$

Posons $\operatorname{cotg} x = z$ et appliquons le principe fondamental; il vient :

$$\sqrt{1 + z^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h} - z\right)^2} = \sqrt{1 + z_1^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h} - z_1\right)^2}$$

d'où

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{h} - z\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h} - z_1\right)^2} = \sqrt{1 + z_1^2} - \sqrt{1 + z^2}$$

appliquant les formules du problème VI, divisant par $z_1 - z$ faisant ensuite $z_1 = z$, il vient après réductions

$$\frac{\left(\frac{b}{h} - z\right)^2}{z^2} = \frac{1 + \left(\frac{b}{h} - z\right)^2}{1 + z^2}$$

d'où $$2z = \frac{b}{h}$$

$$z = \frac{b}{2h},$$

c'est-à-dire $$\operatorname{cotg} x = \frac{b}{2h}$$

alors $\operatorname{cotg} y = \frac{b}{2h}$; $x = y$ et le triangle minimum est le triangle isoscèle.

Problème IX. — *Parmi les triangles qui ont même surface* S^2 *et même angle au sommet* 2α, *quel est celui de périmètre minimum?*

Soient x, y, z les côtés du triangle, 2β et 2θ les angles à la base x; on a

$$yz \sin 2\alpha = 2S^2 \qquad (1)$$

et la quantité à rendre minimum est

$$x + y + z$$

or $$\frac{y}{\sin 2\beta} = \frac{x}{\sin 2\alpha},$$

d'où $$y = \frac{x \sin 2\beta}{\sin 2\alpha},$$

de même $$z = \frac{x \sin 2\theta}{\sin 2\alpha}$$

et le périmètre aura pour expression

$$x + \frac{x \sin 2\beta}{\sin 2\alpha} + \frac{x \sin 2\theta}{\sin 2\alpha},$$

ou (2) $$\frac{x}{\sin 2\alpha}[\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\theta]$$

et la relation (1) deviendra

$$x^2 \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\theta}{\sin^2 2\alpha} = 2S^2$$

d'où $$\frac{x}{\sin 2\alpha} = S\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\theta}}.$$

Remarquant que

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\theta = 4\cos\alpha \cos\beta \cos\theta,$$

l'expression (2) du périmètre deviendra

$$S\sqrt{\frac{2}{\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\theta}}\ [4 \cos\alpha \cos\beta \cos\theta]$$

ou $$2S\sqrt{\cot g\,\alpha \cot g\,\beta\, tg\,(\alpha+\beta)}$$

en remarquant que $\theta = 90^\circ - (\alpha+\beta)$.

Et l'expression à rendre minimum est

$$\cot g\,\beta\ tg\,(\alpha+\beta),$$

β étant la variable.

D'après le principe posé, il vient :

$$\cot g\,\beta\ tg\,(\alpha+\beta) = \cot g\,\beta_1\ tg\,(\alpha+\beta_1).$$

Expression que l'on peut écrire :

$$(\cot g\,\beta - \cot g\,\beta_1)\ tg\,(\alpha+\beta) = \cot g\,\beta_1\,[tg\,(\alpha+\beta_1) - tg\,(\alpha+\beta]$$

ou $$\frac{\sin(\beta_1-\beta)}{\sin\beta_1 \sin\beta}\ tg\,(\alpha+\beta) = \cot g\,\beta_1\ \frac{\sin(\beta_1-\beta)}{\cos(\alpha+\beta_1)\cos(\alpha+\beta)}$$

Divisant par $\sin(\beta_1-\beta)$ il vient après réductions :

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta_1) = \sin\beta \cos\beta_1.$$

Faisons maintenant $\beta_1 = \beta$; on a :

$$\sin 2(\alpha+\beta) = \sin 2\beta.$$

Il ne s'ensuit pas que $2(\alpha+\beta) = 2\beta$,

mais que : $2(\alpha+\beta) = 180 - 2\beta$,

d'où : $2\beta = 90 - \alpha$.

On trouverait de même : $2\theta = 90 - \alpha$

Le triangle répondant à la question est donc le triangle isoscèle.

D'après ce qui précède, nous pouvons formuler une règle pour trouver le maximum d'une fonction d'une ou de plusieurs variables.

Après avoir éliminé les variables moins une, à l'aide d'équations ou de relations données entre ces variables, on obtiendra une fonction d'une seule variable dont il faudra déterminer le maximum ou le minimum.

On égalera cette fonction à une autre dans laquelle on remplacera la variable par une nouvelle variable, x_1 *par exemple. On disposera alors de cette égalité pour mettre en évidence dans chaque membre le facteur* $x_1 - x$. *On divisera par ce binôme et dans le reste obtenu on fera* $x_1 = x$.

En résolvant l'équation en x *obtenue, on aura le maximum et le minimum.*

PROBLÈMES QUI SE RÉSOLVENT FACILEMENT PAR CETTE MÉTHODE.

1. — On donne un triangle ABC. Déterminer sur les côtés AB, AC deux points D et E tels que la droite DE qui partage la surface du triangle en deux parties égales soit minima.

2. — On donne deux points A et B et une droite *xy*.

Déterminer sur cette droite un point C tel que CA + CB soit minimum.

3. — Parmi les triangles rectangles dans lesquels la somme des côtés est constante, quel est celui dont l'hypoténuse est minima?

4. — Parmi les triangles rectangles dans lesquels l'hypoténuse est constante, quel est celui qui a une surface maxima?

5. — Par un point M pris entre les côtés d'un angle donné A, mener une droite rencontrant ses côtés en B et C, telle que la surface du triangle ABC soit minima.

6. — Quel doit être l'angle à la base d'un triangle isoscèle inscrit dans un cercle de rayon R pour que la surface de ce triangle soit maxima?

7. — A une sphère donnée circonscrire un cône de volume minimum.

8. — Parmi tous les cônes droits de surface latérale donnée, quel est celui qui a un volume maximum?

9. — Parmi tous les cônes droits de volume donné, quel est celui de surface totale minima?

10. — Parmi tous les prismes droits triangulaires de même hauteur, dans lesquels une des faces et la base ont des surfaces données, trouver celui qui a la plus petite surface totale.

11. — Enlever d'un cercle de rayon donné un secteur tel que si de la partie restante du cercle, on fait un cône, ce cône ait un volume maximum.

12. — Déterminer le rayon d'une sphère de façon qu'on puisse en extraire un secteur sphérique tel que son volume soit égal au volume d'une sphère donnée et dont la surface totale soit maximum.

13. — On plonge dans un cône droit rempli de liquide un cube dont la base inférieure doit être parallèle à la base du cône. Trouver le volume de ce cube pour qu'il déplace le plus de liquide possible.

14. — Par un point P pris hors d'un cercle de rayon R on mène deux tangentes faisant entre elles un angle 2α. Mener une troisième tangente telle que le triangle PAB soit minimum.

15. — Trouver le cône de volume maximum que l'on peut inscrire dans un ellipsoïde.

16. — Parmi tous les triangles qui ont un angle donné 2α et même périmètre $2p$, trouver celui de plus grande surface.

17. — De tous les troncs de prismes triangulaires dans lesquels on donne une face latérale, l'arête apposée et la section perpendiculaire aux arêtes latérales, trouver celui dans lequel la somme des bases est minimum.

18. — Soit une droite EF, faisant un angle α avec un plan donné et C un point donné du plan. Déterminer sur EF un point tel qu'un foyer lumineux placé en ce point envoie le maximum d'éclairement au point C. C. C.

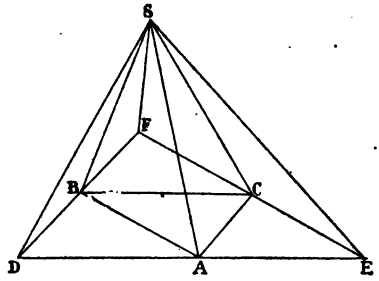
QUESTION DE GÉOMÉTRIE,

par M. Bergson, élève du lycée Fontanes.

Étant donné un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux, exprimer son volume en fonction de ses trois arêtes. (Ex. 124, Questions de Géométrie par M. Desboves.)

Soit un tétraèdre SABC, dont les trois arêtes BC, AC, AB, respectivement égales à SA, SB, SC, seront désignées par a, b, c. Par chacun des sommets du triangle ABC menons

une parallèle au côté opposé : nous déterminons ainsi un triangle DEF quadruple du triangle ABC. Si ensuite par le point S et les droites DE, EF, DF, nous faisons passer des plans, nous obtenons un second tétraèdre SDEF quadruple du premier. Je dis que l'angle trièdre S de ce tétraèdre est trirectangle. Considérons en effet la face DSE, par exemple : dans le triangle DSE, la droite SA est une médiane; mais SA est égale à BC et, par suite, à la moitié de DE. Donc, dans le triangle DSE, la médiane issue du sommet S est égale à la moitié du côté auquel elle aboutit; par suite, ce triangle est rectangle en S, et le trièdre S est trirectangle.



Dès lors, le tétraèdre SDEF peut être considéré comme ayant pour hauteur SE et pour base SDF. Son volume sera donc égal à $\dfrac{\overline{SD} \times \overline{SE} \times \overline{SF}}{6}$. D'autre part, les triangles rectangles SED, SEF, SFD, donnent les trois équations

$$(1) \qquad \overline{SD}^2 + \overline{SE}^2 = \overline{DE}^2 = 4a^2,$$
$$(2) \qquad \overline{SD}^2 + \overline{SF}^2 = \overline{DF}^2 = 4b^2,$$
$$(3) \qquad \overline{SF}^2 + \overline{SE}^2 = \overline{EF}^2 = 4c^2.$$

Ajoutons ces trois équations membre à membre; puis, de l'équation ainsi obtenue, retranchons successivement, membre à membre, les équations (1), (2) et (3) ; il vient :

$$\overline{SF}^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2),$$
$$\overline{SE}^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2),$$
$$\overline{SD}^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2).$$

Donc le volume du tétraèdre SDEF est égal à

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$$

et le volume du tétraèdre SABC, qui en est le quart, a pour expression

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

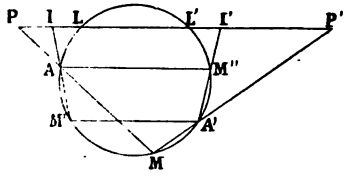
CONCOURS GÉNÉRAL DE 1876.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Solution par M. Bernard, de Liége.

On donne une circonférence, une droite fixe LL′, *qui rencontre la circonférence, et deux points fixes* A *et* A′ *sur la circonférence. On joint un point quelconque* M *de la courbe aux points* A *et* A′. *Les droites* MA, MA′ *rencontrent* LL′ *en deux points variables* P *et* P′. *Démontrer qu'il existe sur* LL′ *deux points fixes* I *et* I′ *tels que le produit* IP × I′P′ *demeure constant lorsque* M *se meut sur la circonférence. — Déterminer la position des points* I *et* I′.

Les deux points P et P′ étant mobiles sur la droite LL′, il arrivera un moment où le point P, par exemple, se trouvera en I, l'un des points cherchés. Alors, PI devenant nul, pour que le produit PI×P′I′ soit constant, il faut que P′I′ soit infini ; car on a $P'I' = \frac{\text{constante}}{PI} = \infty$, si $PI = 0$.



Donc, pour cette position du point P, le point P′ est indéfiniment éloigné de I′, c'est-à-dire que la droite A′M, mobile, devient parallèle à LL′. Cette considération nous permet de construire le point I ; il suffit de mener A′M′ parallèle à LL′, puis de joindre M′A. Cette droite M′A rencontrera LL′ au point cherché I. Le point I′ se construira de la même manière, au moyen de la parallèle AM″ et de la droite A′M″.

Les deux points I et I′ étant ainsi déterminés, il est facile de prouver qu'ils satisfont à la question, c'est-à-dire que

$$PI \times PI' = \text{const.}$$

En effet, les deux triangles PAI, P′A′I′ ayant leurs angles égaux deux à deux, sont semblables et donnent

$$\frac{PI}{AI} = \frac{A'I'}{P'I'}.$$

d'où $\quad PI \times P'I' = AI \times A'I'$

or $\quad M'I = A'I'$

donc $\quad PI \times P'I' = AI \times IM' = IL \times IL' \ldots$

Donc. . . . . .

Nota — Ont résolu la même question : MM. Perrin, de Clermont-Ferrand; Canon, de Liége; Biette, du Havre; Simon, d'Avignon; Garnier, de Nancy et A. T., de Saint-Omer, qui nous en a adressé en outre une solution trigonométrique.

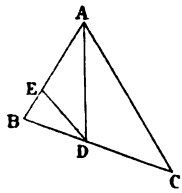
Classe de seconde.

Solution par M. Ernst, élève du lycée Charlemagne. (Copie couronnée.)

1° *Construire un triangle, connaissant les longueurs de deux côtés et celle de la bissectrice de l'angle compris entre ces côtés.*

Supposons le problème résolu ; soit le triangle ABC, dans lequel on connaît AB, AC, AD.

Par le point D menons une parallèle DE au côté AC. Le triangle AED est isoscèle ; en effet, l'angle EAD égale l'angle DAC et l'angle DAC égale l'angle EDA ;



donc $\quad EAD = EDA,$

donc $\quad EA = ED.$

Les parallèles ED et AC donnent

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC};$$

mais

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};$$

donc

$$\frac{BE}{EA} = \frac{AB}{AC}$$

Le point E divise donc la droite AB connue dans le rapport connu $\frac{AB}{AC}$.

De là la construction suivante :

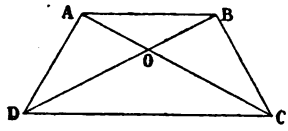
Divisant AB dans le rapport $\frac{AB}{AC}$, on obtient le point E, Du point E comme centre avec EA pour rayon, décrivons une circonférence, et du point A comme centre avec AD pour rayon, décrivons une seconde circonférence qui coupe la première en D. Joignons BD. Enfin, du point A comme

centre avec AC pour rayon, décrivons une circonférence qui coupe le prolongement de BD en C. Le triangle ABC est le triangle cherché.

Nota. — M. Bernard, de Liége, a résolu la même question.

2° *On mène les diagonales d'un trapèze* ABCD, *lesquelles se coupent en* O. *On donne les aires* p^2 *et* q^2 *des triangles* AOB, COD. *Trouver l'expression de l'aire des deux autres triangles* AOD, BOC, *et celle de l'aire du trapèze.*

Les deux triangles DAC, DBC étant équivalents, comme ayant même base et même hauteur, si de chacun d'eux on retranche le triangle DOC, il reste des triangles équivalents AOD, BOC.



Soit x^2 la surface de l'un deux; l'autre sera aussi x^2.

Les deux triangles AOD, ODC ayant même hauteur sont entre eux comme leur base ; on a

$$\frac{x^2}{q^2} = \frac{AO}{OC}$$

il en est de même des triangles AOB, BOC et l'on a

$$\frac{AO}{OC} = \frac{p^2}{x^2};$$

donc $$\frac{x^2}{q^2} = \frac{p^2}{x^2},$$

d'où $$x^2 = pq.$$

La surface de chacun des deux triangles est donc pq, et par suite la surface totale du trapèze sera

$$S^2 = p^2 + q^2 + 2pq = (p + q)^2.$$

CONCOURS ACADÉMIQUE DE RENNES 1876.

Solution par M. Lauriol, élève du lycée d'Avignon.

On donne l'angle droit xAy *et une circonférence* C *dont le centre est sur* Ax *et de rayon* R. *La droite* Ay *est extérieure à cette circonférence. On demande :*

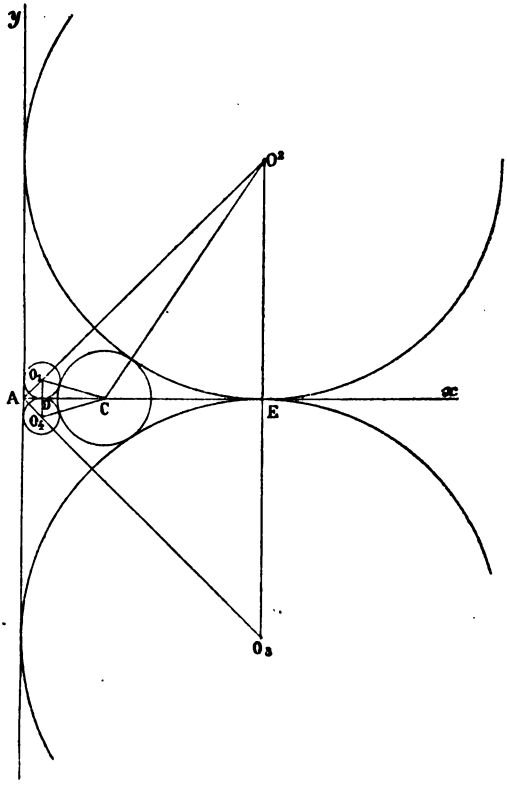
1° *De calculer les rayons des quatre circonférences* O_1, O_2, O_3, O_4, *tangentes en même temps aux deux droites* Ax, Ay *et à la circonférence* C;

2° *De calculer la surface du trapèze* O_1 O_2 O_3 O_4;

3° *De calculer la tangente de l'angle* O_1CO_2. *Discuter*;

4° *De trouver la condition pour que les circonférences* O_1 *et* O_2 *se touchent.*

Remarquons d'abord que Ay étant extérieure à la circonférence C, nous n'aurons que des circonférences tangentes extérieurement à cette circonférence; de plus, il est facile de prouver que les quatre circonférences O_1, O_2, O_3, O_4 sont égales deux à deux. Nous n'avons donc à chercher que les rayons des circonférences O_1 et O_2. Nous observerons encore que les distances du point A aux divers points de contact des circonférences avec les droites Ax et Ay sont respectivement égales au rayon de la circonférence considérée, enfin que les points A, O_1 et O_2 sont sur une même ligne droite, bissectrice de l'angle xAy, et par conséquent formant avec Ax un angle de 45°.



1° Cela posé, soient R le rayon de la circonférence C, r_1 et r_2 les deux rayons des circonférences O_1 et O_2 que nous devons calculer, et a la distance AC du sommet de l'angle droit au centre de la circonférence donnée.

Menons les deux rayons O_1D, O_2E passant par les points de contact. Les triangles rectangles O_1DC, O_2EC donnent respectivement

$$\left.\begin{aligned}(R + r_1)^2 &= r_1^2 + (a - r_1)^2\\ (R + r_2)^2 &= r_2^2 + (a - r_2)^2\end{aligned}\right\}(\alpha)$$

Ces deux équations étant identiques, les rayons des circonférences O_1 et O_2 seront les racines de l'équation.

$$X^2 - 2(a + R)X + a^2 - R^2 = 0 \qquad (1);$$

d'où l'on tire $r_1 = a + R - \sqrt{2R(a + R)}$

et $r_2 = a + R + \sqrt{2R(a + R)}$.

La quantité placée sous le radical étant toujours positive, les valeurs de r_1 et de r_2 seront toujours réelles; de plus, comme par hypothèse Ay est extérieure à la circonférence C, on a $a > R$;

d'où l'on tire successivement

$$a + R > 2R$$

$$(a + R)^2 > 2R(a + R)$$

et enfin $a + R > \sqrt{2R(a + R)}$;

donc le second terme est toujours inférieur au premier, et comme $a + R$ est positif, les deux racines r_1 et r_2 sont positives.

Si nous supposons $a = R$, l'équation (1) devient

$$X^2 - 4RX = 0,$$

ou $X(X - 4R) = 0$

et par suite $r_1 = 0$, $r_2 = 4R$.

Dans ce cas particulier, la circonférence C devient tangente à la droite Ay et la circonférence O_1, se réduisant à son centre qui se confond avec le point A, a un rayon nul. La seconde des équations (α) donne alors

$$(R + r_2)^2 = r_2^2 + (R - r_2)^2,$$

ou $r_2 = 4R$,

valeur conforme à celle trouvée précédemment.

Si R tend vers zéro, $\sqrt{2R(a + R)}$ tend également vers

zéro; les deux racines tendent à devenir égales entre elles, et les rayons r_1 et r_2 tendent à devenir égaux à a.

En effet, si $R = 0$, la circonférence C se confond avec son centre et les deux circonférences, devant être toutes deux tangentes à la droite Ax au point C, se confondent.. Dans ce cas, les deux rayons de contact et les tangentes issues du point A forment un carré.

Si a tend vers l'infini, les deux racines tendent vers l'infini, sauf pour le cas où $R = a$; alors r_1 s'annule et r_2 tend vers l'infini. faux — si $a - R$ = const. $r_1 = \frac{b}{a}$.

Si a tend vers zéro, R, qui est par hypothèse au plus égal à a, tend aussi vers zéro, et les trois circonférences C, O_1 et O_2 se confondent avec le point A ; les racines sont donc nulles.

2° Comme les circonférences O_1 et O_4, O_2 et O_3 sont tangentes en un même point de la droite Ax et tangentes entre elles, l'aire du trapèze $O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ est

$$S = (r_1 + r_2)(r_2 - r_1) = r_2^2 - r_1^2,$$

ou

$$S = 4(a + R)\sqrt{2R(a + R)}$$

Si $a = 0$, le trapèze s'annule; si $a = R$, $r_1 = a$, alors le trapèze devient un triangle ayant son sommet en A, $O_2\ O_3$ pour base et AE pour hauteur; l'aire est alors égale à $16\ R^2$.

Si R s'annule, $r_1 = r_2$, l'aire du trapèze s'annule aussi, car les deux bases $O_1\ O_4$, $O_2\ O_3$ se confondant, le trapèze se réduit à une ligne.

Si a tend vers l'infini, $r_1 = 0$, r_2 tend vers l'infini et par suite S tend aussi vers l'infini, sauf le cas où $R = 0$; alors $r_1 = r_2$ et $S = 0$.

3° Désignons par ω l'angle O_1CO_2 dont on demande la tangente, et soient β, β' les angles O_1CD, O_2CE.

La somme de ces angles étant le supplément de l'angle ω, on a

$$\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg}(\beta + \beta').$$

Or

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_1}{a - r_1}$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{r_2}{r_2 - a}.$$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{tg}(\beta + \beta') = \frac{a(r_2 - r_1)}{a(r_2 + r_1) - 2r_1 r_2 - a^2}.$$

Prenant dans l'équation (1) les valeurs de $r_2 - r_1$, $r_2 + r_1$, $r_1 r_2$, nous aurons

$$\operatorname{tg}(\beta + \beta') = \frac{2a\sqrt{2R(a+R)}}{2aR - a^2 + 2R^2}$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{2a\sqrt{2R(a+R)}}{2R^2 + 2aR - a^2} = \frac{2a\sqrt{2R(a+R)}}{a^2 - 2R(a+R)} \quad (2).$$

Étudions maintenant les variations de tg ω et par suite de ω.

Si $a = 0$, R est aussi égal à zéro et par suite

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{0}{0},$$

Il n'y a donc pas, dans ce cas, de discussion possible.

Nous supposerons donc $a > 0$.

Faisons d'abord $R = 0$. Dans cette hypothèse, la valeur de tg ω s'annulera également, car alors les deux circonférences, et par suite les droites O_1C, O_2C, se confondent; l'angle ω est égal à zéro; il en est de même de sa tangente.

Si $a > 0$ et $R > 0$, le numérateur de l'expression (2) est toujours positif et jamais nul; mais le dénominateur peut être nul, positif ou négatif; alors tg ω peut devenir infinie, positive ou négative, et ω est alors égal, inférieur ou supérieur à 90°.

1° Soit $\qquad a^2 - 2aR - 2R^2 = 0$;

on en conclut : $\quad R = \frac{a}{2}(\pm\sqrt{3} - 1)$.

En conservant seulement la valeur positive, nous pourrons conclure que pour que ω soit droit, il faut que

$$\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

2° Soit $\qquad a^2 - 2aR - 2R^2 > 0$;

alors $\qquad 2R^2 + 2aR - a^2 < 0$,

et par suite, en ne conservant que la valeur positive,

$$R < a\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Donc, pour que tg ω soit positive et par conséquent $\alpha < 90°$, il faut que le rapport $\frac{R}{a}$ soit plus petit que $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

3° On prouverait de même que, pour que tg ω soit négative et par suite $\omega > 90°$, il faudrait que

$$\frac{R}{a} > \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

En résumé, si

$$\frac{R}{a} = 0, \qquad \operatorname{tg} \omega = 0, \qquad \omega = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2} > \frac{R}{a} > 0, \quad \operatorname{tg} \omega > 0, \qquad \omega < 90°.$$

$$\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \qquad \operatorname{tg} \omega = \pm \infty \quad \omega = 90°.$$

$$\frac{R}{a} > \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \qquad \operatorname{tg} \omega < 0, \qquad \omega > 90°.$$

Nous voyons par le tableau ci-dessus que ω croît avec le rapport $\frac{R}{a}$; ce rapport ne peut par hypothèse être supérieur à 1; lorsqu'il atteint cette limite, on a $R = a$ et par suite $\operatorname{tg} \omega = -\frac{4}{3}$.

Alors $\qquad \omega = 126° \, 52' \, 1'', 7,$

et cette valeur est sa valeur maximum.

4° Pour que les circonférences O_1 et O_2 soient tangentes, on doit avoir $\qquad O_1 O_2 = r_1 + r_2 \qquad (3)$;

or

$$O_1O_2 = \frac{DE}{\cos O_1AD} = \frac{DE}{\cos 45°} = \frac{2\sqrt{2R\,a + R^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= 4\sqrt{R(R + d)}.$$

Par suite, portant cette valeur dans (3), il vient

$$4\sqrt{R(a + R)} = 2(a + R),$$

d'où $\qquad \frac{R}{a} = \frac{1}{3}$

Donc, pour que les circonférences O_1 et O_2 soient tangentes, il faut et il suffit que le rapport du rayon à la longueur a soit égal à $\frac{1}{3}$.

Nota. — M. Biette, du lycée du Havre, a résolu la même question.

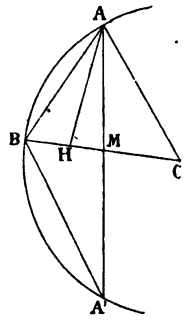
CONCOURS ACADÉMIQUE DE POITIERS 1876.

Solutions des questions par M. PERRIN, élève du lycée de Clermont-Ferrand.

1° *Déterminer un triangle, connaissant l'un des angles ainsi que la médiane et la hauteur issues du sommet de cet angle.*

Soit ABC le triangle cherché, dans lequel on connaît l'angle A, la hauteur AH et la médiane AM.

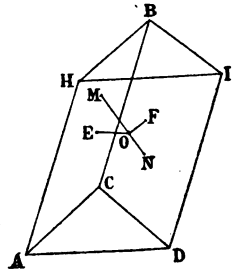
On peut construire le triangle rectangle AMH, puisqu'on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse. La position de BC par rapport au sommet est donc déterminée. Prolongeons AM de AM, = AM, la droite BA′ étant parallèle à AC, l'angle A′BA = 180° — BAC; le point B est donc l'intersection du segment capable de 180° — BAC, décrit sur AA′, avec la droite MH.



Le problème n'est possible qu'autant que la médiane est supérieure ou au moins égale à la hauteur. Dans ce dernier cas, le triangle est isoscèle.

2° *Étant donnés un angle dièdre et une droite joignant un point de l'une des faces à un point de l'autre, déterminer sur cette droite un point tel que la somme de ses distances aux deux faces soit égale à une longueur donnée. — Discuter la question. — Chercher quelle condition doit remplir la droite donnée pour que cette somme ait la même valeur pour tous ses points.*

Soit ABCD le dièdre donné, la droite MN joignant un point de l'une des faces à un point de l'autre, O le point cherché.



Alors OE + OF = l.

Par le point O menons le plan ADIH perpendiculaire au plan bissecteur de l'angle dièdre ABCD. La somme des distances d'un point quelconque du plan ADIH aux deux faces du dièdre est constamment égale à l.

Le point cherché sera donc l'intersection de MN avec le plan qui est le lieu des points dont la somme des distances aux deux faces du dièdre est constamment égale à l.

Le plan ADIH pourra couper la droite MN hors de l'angle dièdre ABCD. Alors le point O n'aura plus la même propriété ; la différence des distances de ce point aux deux faces du dièdre sera égale à l.

Pour que la somme OE + OF ait la même valeur pour tous les points de la droite MN, il faut que cette droite soit tout entière située dans le plan ADIH.

Nota. — M. Réveille, de Montpellier, a résolu la même question.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 27.

Solution par M. Mahieux, élève du lycée de Saint-Quentin.

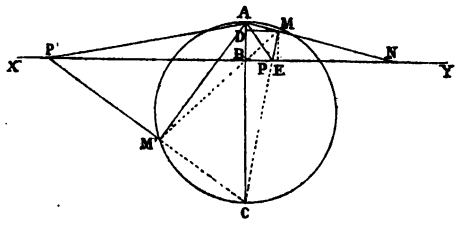
On donne un point fixe A *et une droite fixe* xy ; *construire un triangle isoscèle rectangle* AMP *qui a un sommet en* A, *le sommet* P *situé sur* xy *et tel que si l'on prolonge* AM *jusqu'à sa rencontre en* N *avec* xy, *on ait* AM $\times$ AN $= K^2$.

(Lucien Lévy.)

Pour résoudre ce problème, nous rappellerons le théorème suivant : *Etant donné un point fixe* A *et une droite fixe* xy, *si on mène par* A *une droite quelconque jusqu'à sa rencontre avec* xy, *le lieu des points* M *de* AN *tels que l'on ait* AM $\times$ AN $= K^2$, *est une circonférence.*

En effet, du point A abaissons sur xy une perpendiculaire AB et prolongeons-la d'une quantité BC telle que

$$AB \times AC = K^2.$$



Désignons par l la perpendiculaire AB ; si $l < K$, le point C est sur le prolonge-

ment de AB; si $l > K$, le point C est situé entre A et B; enfin si $l = K$, le point C se confond avec B.

Dans tous les cas, soit M un point du lieu, joignons CM. Les deux triangles ACM, ABN sont semblables. Comme l'un est rectangle en B, l'autre le sera en M. Ses côtés passant par deux points fixes A et C, le lieu du point M sera la circonférence décrite sur AC comme diamètre.

Cela posé, revenons au problème proposé. Supposons le problème résolu et soit AMP le triangle cherché. D'après le théorème précédent, le point M sera situé sur la circonférence décrite sur AC comme diamètre. Abaissons MD et ME perpendiculaires sur xy, les triangles DMA et PME étant égaux, on a MD = ME, et le point M se trouve aussi sur la bissectrice de l'angle ABN. De là la construction suivante :

Du point A abaissons la perpendiculaire AB sur xy et déterminons sur cette perpendiculaire un point C tel que

$$AB \times AC = K^2.$$

Sur AC comme diamètre décrivons une circonférence et menons la bissectrice de l'angle ABy, qui rencontrera la circonférence en M. Joignons AM et MC, qui, coupant xy en P, déterminera le triangle AMP.

Le problème a deux solutions, car la bissectrice coupera la circonférence en un second point M′; on aura donc un second triangle AM′P′.

Si $l < K$, le problème aura deux solutions; si $l > K$, le problème aura encore deux solutions si la bissectrice est une sécante par rapport au cercle, une seule si elle est tangente, et aucune si elle ne le rencontre pas.

Si $l = K$, il n'y a qu'un seul triangle, dont l'hypoténuse est AB.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Rochard, de Dijon; Vautré, de Saint-Dié (solution algébrique); Landouzy, de Lille; Lorin, de Semur: Lainey, de Cherbourg; Vídnau, de Bordeaux; Bellamy, de Saint-Brieuc; Canon, de Liége; Perrin, de Clermont; Estienne, de Bar-le-Duc. M. Nigri, élève au lycée de Pau, nous fait observer que ce problème n'est qu'un cas particulier du problème suivant, dont il nous adresse une élégante solution.

Etant donné un point fixe A *et une droite* xy, *construire un triangle* APM *semblable à un triangle donné, ayant un sommet au point* A, *un autre sommet* P *sur* xy, *et tel que si le côté* AM *rencontre* xy *au point* N, *on ait* $AM \times AN = K^2$.

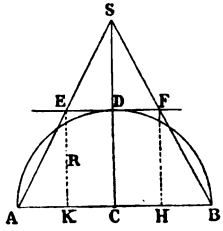
QUESTION 30.

Solution par M. TALLAVIGNES, élève de mathématiques à Sainte-Barbe.

On donne une demi-circonférence et une tangente parallèle au diamètre. Sur ce diamètre on construit un triangle équilatéral SAB, *dont les côtés* SA, SB *coupent la tangente en* E *et* F. *La ligne brisée* AEFB, *tournant autour du diamètre, engendre une surface équivalente à la surface de la sphère qui décrit la demi-circonférence* ADB *en tournant autour de son diamètre.*

Soit AC = R; il faut prouver que

$$\text{Surf. AEFB} = 4\pi R^2.$$



En effet,

$$\begin{aligned}\text{Surf. AEFB} &= 2 \text{ surf. AE} + \text{surf. EF}\\ &= 2\pi R \,.\, AE + 2\pi R \,.\, EF\\ &= 2\pi R\,(AE + EF).\end{aligned}$$

Les triangles semblables EGA, SCA donnent:

$$\frac{AE}{AS} = \frac{R}{SC},$$

d'où en remarquant que $SC = R\sqrt{3}$

$$AE = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3},$$

Les triangles semblables SEF, SAB donnent

$$\frac{EF}{2R} = \frac{SC - CD}{SC},$$

d'où $EF = \dfrac{2R\,(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{2R\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1)}{3},$

par suite

$$AE + EF = \frac{2R\sqrt{3}}{3} + \frac{2R\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1)}{3} = 2R,.$$

et l'on a $\quad \text{Surf. AEFB} = 2\pi R \,.\, 2R = 4\pi R^2.$

QUESTION 31.

Solution par M. CORDEAU, élève de l'École Lavoisier, Paris.

On donne un demi-cercle et une tangente parallèle au diamètre. Sur ce diamètre on construit un triangle isoscèle, dont la

hauteur SC *est égale au diamètre* AB. *Les côtés du triangle coupent la tangente en* E *et* F. *Le polygone* AEFB, *en tournant autour du diamètre, engendre un volume équivalent à celui de la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre.*

Soit AC = R. Je dis que

$$\text{vol AEFB} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

En effet,

$$\text{vol AEFB} = 2 \text{ vol AKE} + \text{vol KEF}.$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 AK + \pi R^2 EF = \pi R^2\left(\frac{2}{3}AK + EF\right).$$

D étant le milieu de SC, on a ;

$$EF = \frac{AB}{2} = R.$$

De plus les triangles égaux SDE, EKA donnent

$$AK = ED = \frac{R}{2};$$

on a donc

$$\text{vol AEFB} = \pi R^2\left(\frac{R}{3} + R\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

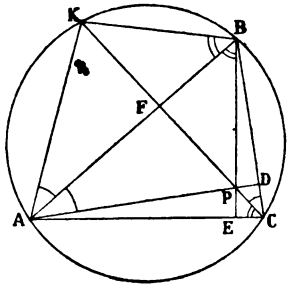
Nota. — Les questions 30 et 31 ont été résolues par MM. Biette, Mérieult, du Havre; Canon, Bernard, Lecoq, Orth, de Liége; Degueldre, Nénon, Meurant, Rigot, de Dinant; Bolandard, de Lons-le-Saulnier; Contour, Belin, Lorain, de Semur; Nigri et Comandré, de Pau; Colardeau, de Charleville; Bellamy, de Saint-Brieuc; Poupeville, de Cherbourg; Vautré, de Saint-Dié; Godin, Labro, de Saint-Quentin; Rochard, de Dijon; Landouzy, de Lille; Geri de Pazzy, à Fribourg; Gautier, de Montpellier; Montpetit, école Saint-Stanislas, à Abbeville; Regy, Lugol, à Montauban; Lantoine, à Saint-Omer; Granger, à Périgueux; Lynch et Woestyn, lycée Fontanes, à Paris; Delarue et Duflot, institution Marc-Dartès, à Paris; Maquaire, à la Flèche; Lemoine, Lor, à Laon; Florentin, à Bar-le-Duc; Petit, au Puy; Vinas, à Perpignan; Fougerolles, à Chambéry; Aurenty, à Marseille; Thual, à Lorient; Pyolle, à Constantine; Gouat, collége de Tonnerre.

QUESTION 43.

Solution par M. **Canon**, élève à l'Athénée royal de Liége.

Démontrer que si, dans un triangle ABC, *on mène les trois hauteurs* AD, BE, CF, *qui se coupent au point* P, *on a* $\overline{PA}^2 \cdot \overline{PB}^2 \cdot \overline{PC}^2 = 8R^3 \cdot PD \cdot PE \cdot PF$.

Démontrons d'abord que le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est égal au rayon du cercle circonscrit à chacun des triangles BPA, APC, CPR. Prolongeons CF jusqu'à sa rencontre en K avec la circonférence; joignons AK, KB; le triangle AKB est égal au triangle ABP. En effet, $K\hat{A}B = K\hat{C}B$ comme inscrits dans un même segment et $K\hat{C}B = B\hat{A}D$ comme ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun; donc KAB = BAD. De même, KBA = KCA = ABC et le côté AB étant commun, les deux triangles sont égaux. Par conséquent, puisque le rayon du cercle circonscrit à ABC est égal à celui du cercle circonscrit à AKB, il l'est aussi à celui de ABP. On démontrerait de même pour BPC et APC.



Nous savons que, dans tout triangle, le produit de deux côtés est égal au diamètre du cercle circonscrit multiplié par la perpendiculaire abaissée sur le troisième côté. Donc :

dans APB, on a $AP \cdot PB = 2R \cdot PF$.
dans BPC $BP \cdot PC = 2R \cdot PD$
dans APC $AP \cdot PC = 2R \cdot PE$

Multipliant membre à membre, il vient :

$$\overline{PA}^2 \cdot \overline{PB}^2 \cdot \overline{PC}^2 = 8R^3 \cdot PD \cdot PE \cdot PF.$$

Nota. — Ont résolu la même question, MM. Pradel, de Montauban; Bernaou, d'Épernon; Biette, du Havre; Jullidière, de Mont-de-Marsan; Nepveu, de Châteauroux.

QUESTION 42.

Solution par M. Richard, de Chartres.

De l'égalité : $2\cos\theta = u + \frac{1}{u}$, *on tire* $2\cos n\theta = u^n + \frac{1}{u^n}$.

La relation connue entre les cosinus de trois arcs en progression arithmétique donne

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

d'où $2\cos n\theta = 2\cos(n-1)\theta \cdot 2\cos\theta - 2\cos(n-2)\theta$.

1° Si la loi s'applique à $2\cos(n-1)\theta$ et à $2\cos(n-2)\theta$, elle s'appliquera à $2\cos n\theta$, car, dans ce cas :

$$2\cos n\theta = \left(u^{n-1} + \frac{1}{u^{n-1}}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right) - \left(u^{n-2} + \frac{1}{u^{n-2}}\right)$$
$$= u^n + \frac{1}{u^n}.$$

2° Si $n = 2$; $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$,

d'où $$2\cos 2\theta = \left(u + \frac{1}{u}\right)^2 - 2 = u^2 + \frac{1}{u^2}.$$

Le théorème étant vrai pour $n = 1$, $n = 2$, sera vrai aussi pour $n = 3$, d'après la première partie de notre démonstration. Il sera donc vrai pour $n = 4, 5, 6\ldots$ c'est-à-dire pour toute valeur de n.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Biette, du Havre; X. du collége Rollin; Bellamy, de Saint-Brieuc.

ACADÉMIE DE CLERMONT.

Baccalauréat ès sciences.

1re SÉRIE. — 20 juillet.

1. — Déterminer la fraction qui jouit de la propriété de ne pas changer de valeur quand on ajoute le nombre 6 à son numérateur et le nombre 15 à son dénominateur.

2. — On décrit avec un compas sphérique un petit cercle sur la surface d'une sphère de rayon $0^m,20$. Quelle doit être la distance des branches du compas pour que la surface de la sphère soit ainsi divisée en moyenne et extrême raison?

2e SÉRIE. — 23 juillet.

1° Définir l'erreur absolue et l'erreur relative,

2° Déterminer les angles d'un triangle isoscèle ABC tel que si l'on prolonge la base BC jusqu'à sa rencontre en D avec la perpendiculaire AD au côté AB, les deux triangles ABC et CAD engendrent en tournant autour de AD des volumes égaux.

3e SÉRIE. — 25 juillet.

1. — Un angle a est déterminé par la formule trigonométrique

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{\sqrt{m^2+n^2+m^2}}{\sqrt{m^2+n^2+n}}}$$

où m et n sont donnés, par exemple $m = 1$ et $n = 2$.

On demande de calculer les valeurs de

Cos $2a$ sin $2a$ et tg $2a$.

2. — Prouver que si l'on coupe un parallélipipède par un plan passant par le centre, les deux solides ainsi obtenus sont équivalents.

4e SÉRIE. — 27 juillet.

1. — On demande de diviser $x^4 + 1$ par le polynôme $x^2 + px + q$, où p et q sont des nombres donnés. — Quelle valeur faut-il attribuer à p et à q pour que la division se fasse sans reste ?

2. — Deux faces d'un trièdre sont des angles de 60° et la troisième face est un angle droit. Déterminer, par une construction géométrique ou le calcul, l'un des angles dièdres de ce trièdre.

5e SÉRIE.

1. — Volume engendré par un secteur et un segment circulaire tournant autour d'un diamètre.

2. — Déterminer l'angle O d'un secteur OAMB, de manière que les deux volumes correspondant au secteur AMBO et au segment AMB soient dans le rapport de 2 à 1.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1873.

Classe de philosophie.

On inscrit dans un cercle donné tous les triangles dont deux côtés sont respectivement parallèles à deux droites fixes données, et l'on demande le lieu des centres des cercles inscrits dans ces triangles.

Etant donné un prisme triangulaire, on y fait une section *abc* parallèle aux bases. On joint les sommets *a*, *b*, *c* de cette section à un point O quelconque pris dans le plan de la base supérieure et l'on prolonge les lignes de jonction jusqu'à leur rencontre en A, B, C avec le plan de la base inférieure On demande à quelle distance de la base supérieure doit être faite la section *abc*, pour que le tétraèdre ayant pour sommets O, A, B, C soit équivalent au prisme.

Classe de mathématiques élémentaires.

Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle donné, tracer deux cordes qui fassent entre elles un angle donné et dont le produit soit maximum ou minimum.

On examinera le cas où le point donné serait extérieur au cercle donné.

Classe de rhétorique.

Étant données deux sphères, on inscrit dans la première un cône droit à base circulaire, dont le côté est égal au diamètre de la base et l'on circonscrit à la seconde un cylindre.

On trouve alors que le volume du cône est la 18e partie du volume du cylindre. On demande le rapport des rayons des deux sphères.

Classe de seconde.

Étant donnée une pyramide triangulaire tronquée, on propose de mener par l'une des arêtes de la base supérieure un plan qui divise le volume du tronc en deux parties équivalentes.

Trouver deux nombres dont la somme de leurs inverses soit 0,1025 et la somme de leurs racines carrées soit 9. 75 16.

Classe de troisième.

Étant données deux circonférences O et O′ qui se coupent, on mène par l'un des points communs une sécante qui rencontre la circonférence O en un point B et la circonférence O′ en un point B′. On joint le point B au point O et le point B′ au point O′. Les deux droites ainsi menées se coupent en M. Lieu géométrique de ce point.

Trouver le plus petit nombre qui, divisé par 2, donne pour reste 1; divisé par 3, donne pour reste 2; divisé par 4, donne pour reste 3..... et qui divisé par 10, donne pour reste 9.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1874.

Classe de troisième.

1. — On donne un cercle et deux points fixes A et B sur la circonférence. Par ces deux points on mène deux cordes égales et de grandeur quelconque. Trouver le lieu du point de rencontre de ces cordes.

2. — Démontrer que si la somme $3^n + 1$, dans laquelle n représente un nombre entier, est un multiple de 10, la somme $3^{n+4} + 1$ sera aussi un multiple de 10.

Classe de seconde.

1. — Étant donné un tétraèdre, on suppose que l'on mène par chaque arête un plan parallèle à l'arête opposée, et l'on demande : 1° quel sera le solide ainsi obtenu; 2° quel sera le rapport de son volume à celui du tétraèdre.

2. — La différence de deux nombres est a, la somme de leurs racines carrées est aussi a. Quels sont ces deux nombres?

Classe de rhétorique.

On donne deux sphères tangentes extérieurement, et le rayon de l'une est double du rayon de l'autre. A l'ensemble de ces deux sphères, on circonscrit un tronc de cône, dont on demande le volume et la surface totale, connaissant le rayon de la petite sphère.

Classe de philosophie.

Étant donnés un cercle de rayon R et deux rayons rectangulaires A, OB, déterminer les côtés OC, OE, d'un rectangle OCDE inscrit dans le quart de cercle AOB, et tel que si l'on fait tourner la figure autour de OA, la surface totale du cylindre engendré par le rectangle OCDE soit égale à la surface d'une circonférence de rayon a.

Classe de mathématiques élémentaires.

Étant données les quatre arêtes AB, BC, CD, DA d'un tétraèdre ABCD, déterminer ce tétraèdre de manière que le volume soit maximum. — Le tétraèdre étant ainsi déterminé, calculer les deux arêtes BD et AC et le volume dans les deux cas suivants : 1° lorsque les deux arêtes opposées AB, BC sont égales, ainsi que les arêtes BC et AD; 2° lorsque les deux arêtes consécutives AB, BC sont égales, ainsi que les arêtes CD et DA.

Comparer les volumes en supposant que les deux arêtes AB et AD ont respectivement des longueurs égales dans les deux cas.

QUESTIONS PROPOSÉES.

69. — On donne dans un cercle un rayon fixe OA. On mène un rayon quelconque OC. On abaisse la perpendiculaire CD sur OA. Lieu du point I, centre du cercle inscrit dans OCD. *(Académie de Rennes.)*

70. — On donne un angle YOX et deux points fixes A et B sur le côté OY de cet angle. On joint ces points à un point variable C de OX. On demande les variations du rapport $\frac{AC^2}{CB^2}$, quand le point C se déplace sur OX.

(Académie de Rennes.)

71. Sur une droite constante AB, on prend un point variable C, et on décrit les circonférences ayant AC et BC pour diamètres. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures et de la tangente commune intérieure. ellipse. *(Julliard.)*

72. — Deux mobiles se déplacent sur deux axes rectangulaires et se dirigent avec des vitesses v et v' vers le point d'intersection de ces axes, dont ils sont, à un moment donné, à des distances a et b. A quel instant ces deux mobiles sont-ils le plus proche, l'un de l'autre ?

(Ac. de Nancy, bacc. sci.)

73. — Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, déterminer entre quelles limites peut varier la différence des sections faites dans ces deux corps par un plan parallèle à la base du cône.

4 3 2

74. — Trouver trois nombres tels que les produits de chacun d'eux par la somme des deux autres soient 20, 18 et 14.

75. — Un nombre est composé de trois chiffres. Le carré du chiffre des dizaines est égal au produit des chiffres extrêmes augmenté de 4. La différence entre le double du chiffre des dizaines et celui des unités est égale au chiffre des centaines, et quand on écrit les chiffres de ce nombre dans un ordre inverse, on obtient un second nombre qui, retranché du premier, donne pour reste 390 augmenté du chiffre des dizaines commun à ces deux nombres. Trouver ce nombre. 964 ·

76. — Étant donné un tétraèdre SABC, on inscrit dans la base ABC un carré EFGH, sur lequel on construit un cube EFGHE'F'G'H' situé du côté de la base ABC opposé au quatrième sommet S du tétraèdre. On joint ce sommet S aux points E',F',G',H' par des droites qui coupent ABC aux points e,f,g,h. La figure $efgh$ sera un carré, et le cube construit sur $efgh$ sera inscrit au tétraèdre. — Si x est le côté de ce cube, a la base AC du triangle ABC contenant deux sommets du carré EFGH, h la hauteur de ABC, H la hauteur du tétraèdre, on aura

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h} + \frac{1}{H}.$$

(Concours Pau, 1868.)

77. — Étant données deux droites dont les projections ne se coupent pas dans les limites de l'épure, reconnaître si elles se coupent dans l'espace.

78. — Étant donnée dans le plan horizontal de projection une droite finie AB, trouver les projections du cône de révolution ayant son sommet en A, tangent au plan horizontal le long de AB, sachant que la base passe en B et connaissant l'angle au sommet.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 14646-7.

THÉORIE DE L'INVERSION

OU

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

par M. Cochez.

(*Suite*, voir page 257.)

XII. — Du cercle d'inversion.

On appelle *cercle ou sphère d'inversion* le lieu des points du plan ou de l'espace qui coïncident avec leurs réciproques.

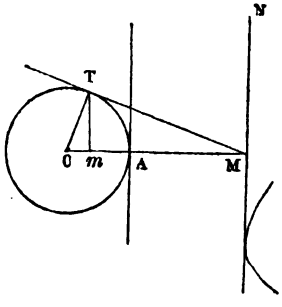
Lorsque le module est positif ce lieu est un cercle ou une sphère ayant pour centre le pôle et pour rayon la racine carrée du module.

Soit M un point d'une figure donnée, O un pôle fixe. Joignons OM; du point O comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{\mu}$, μ étant le module de l'inversion, décrivons une circonférence; si le point M est extérieur au cercle, menons par ce point la tangente MT au cercle d'inversion, et abaissons Tm perpendiculaire sur OM. Le triangle OTM donne

$$OM \times Om = \overline{OT}^2,$$

ou

$$OM \times Om = \mu;$$



donc le point m est l'inverse du point M.

Si le point donné m est dans l'intérieur du cercle, on détermine le point réciproque par la construction suivante : on mène la droite mT perpendiculaire au rayon Om et la tangente au cercle qui rencontre Om au point M réciproque du point m.

Considérons une droite MN quelconque; si du point O on abaisse la perpendiculaire OM, on sait que le point m déterminé par la construction précédente est le *pôle* de la droite MN; si la droite MN se déplace en restant tangente à une

courbe donnée, le point m décrit une courbe qui est le lieu des pôles des tangentes par rapport au cercle, et que l'on appelle *polaire réciproque* de la première courbe.

D'autre part le point M décrit aussi une courbe qui est le lieu des projections du point O sur les tangentes MN à la courbe donnée; ce lieu est appelé *podaire* de la courbe par rapport au point O. On a par conséquent le théorème suivant :

Théorème 6. — *L'inverse de la podaire d'une courbe par rapport au pôle, est en même temps la polaire réciproque de la courbe donnée par rapport au cercle d'inversion.*

Lorsque le module est négatif, le cercle d'inversion n'a aucun point réel; dans ce cas nous appellerons *cercle conjugué d'inversion*, le cercle décrit du pôle comme centre avec un rayon égal à la racine carrée du module pris en valeur absolue. Il est facile de voir que chacun des points de ce cercle est le réciproque du point diamétralement opposé.

Il résulte d'ailleurs du théorème 3 que les figures inverses d'une figure donnée prises par rapport à un même pôle pour des modules égaux et de signes contraires sont des figures symétriques par rapport au pôle.

XIII. **Théorème 7.** — *Deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être considérées comme deux figures inverses.*

En effet, supposons que le cercle d'inversion passe constamment par le point A et que le centre de ce cercle s'éloigne indéfiniment dans la direction AO; à la limite, ce cercle sera remplacé par une droite AB perpendiculaire sur OA; d'ailleurs on a

$$(OA + AM)\ (OA - Am) = \overline{OA}^2;$$

en développant et en divisant les deux membres par OA on tire

$$AM - Am = \frac{AM \times Am}{OA}.$$

Lorsque OA augmente indéfiniment, on obtient à la limite $mA = MA$; par conséquent le point m devient le symétrique du point M par rapport à la droite AB.

Il résulte encore de cette considération que toute figure qui possède un axe de symétrie doit être regardée comme

une figure *anallagmatique*. Aussi, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole, l'ensemble de plusieurs cercles ayant leurs centres en ligne droite, sont des figures anallagmatiques.

XIV. — Les résultats des deux numéros précédents s'appliquent intégralement dans l'espace, en remplaçant le cercle d'inversion par une sphère, les courbes par des surfaces, et les tangentes par des plans tangents. En particulier, lorsque la sphère d'inversion passe par un point fixe, et que son centre s'éloigne indéfiniment dans une direction donnée, cette sphère a pour limite un plan. Le point réciproque d'un point donné devient le point symétrique par rapport au plan, et l'on doit considérer les figures symétriques par rapport à un plan comme des figures anallagmatiques.

(*A suivre.*)

QUESTION D'ARITHMÉTIQUE

Problème. — *Trouver la racine* m^e^ *d'un nombre entier* A, *à moins d'une unité, quand* m *est décomposable en facteurs* p, q, r...

Nous appelons, pour abréger, racine m^e de A à moins d'une unité, la racine de la plus grande puissance m^e contenue dans A.

Supposons $m = pqr$, je dis que pour avoir la racine m^e de A à moins d'une unité, il suffit d'exécuter les opérations suivantes :

1° *Extraire la racine* p^e^ *de* A, *à moins d'une unité, soit* x;

2° *Extraire la racine* q^e^ *de* x, *à moins d'une unité, soit* y;

3° *Extraire la racine* r^e^ *de* y, *à moins d'une unité, soit* z.

Le dernier nombre obtenu z *est la racine* m^e^ *de* A *à moins d'une unité.*

En effet, nous avons, par hypothèse, les deux séries d'inégalités :

$$x^p \leqq A \qquad A < (x+1)^p$$
$$y^q \leqq x \qquad x < (y+1)^q$$
$$z^r \leqq y \qquad y < (z+1)_r$$

De la première série, nous tirons :

$$x^p \leqq A$$
$$y^{pq} \leqq x^p$$
$$z^{pqr} \leqq y^{pq}$$

par suite en ajoutant membre à membre :

$$z^{pqr} \leqq A \qquad \text{ou } z^m \leqq A$$

Considérons maintenant la seconde série. x et $(y+1)^q$ diffèrent au moins d'une unité; y et $(z+1)^r$ sont dans le même cas, donc nous pouvons écrire :

$$A < (x+1)^p$$
$$x+1 \leqq (y+1)^q$$
$$y+1 \leqq (z+1)^r$$

par suite :

$$A < (x+1)^p$$
$$(x+1)^p \leqq (y+1)^{pq}$$
$$(y+1)^{pq} \leqq (z+1)^{pqr}$$

donc, en ajoutant membre à membre :

$$A < (z+1)^{pqr} \text{ ou } A < (z+1)^m.$$

Donc enfin z est bien la racine m^e de A à moins d'une unité. J. B.

ÉVALUATION DES ANGLES

ET DES SURFACES

Des polygones égrédients et des polygones étoilés,

par **Georges Dostor**.

(*Suite*, voir p. 289.)

---

21. *Angle au centre d'un polygone égrédient régulier.* — Divisons une circonférence donnée en n parties égales, et par les points de division menons des tangentes.

Si nous limitons ces tangentes aux points d'intersection de chacune d'elles avec la suivante, nous formerons le polygone régulier convexe de n côtés ou le polygone régulier de première espèce ayant n côtés.

Si, au contraire, nous arrêtons chaque tangente à son in-

tersection avec la *deuxième* suivante, nous aurons un polygone régulier égrédient de *deuxième espèce*, ayant n côtés. Le périmètre de ce polygone enveloppera *deux* fois la circonférence.

Si l'on avait limité chacune de nos tangentes à la *troisième* suivante, on aurait formé un polygone régulier égrédient de *troisième espèce*, ayant n côtés. Le périmètre de ce polygone enveloppe *trois* fois la circonférence.

En général, si l'on termine chaque tangente à la p^{me} tangente qui vient après, on obtiendra le polygone régulier égrédient de *l'espèce* p, ayant n côtés. Le périmètre de ce polygone enveloppe p fois la circonférence.

La somme des angles au centre de ce dernier polygone est donc égale à p fois 4 angles droits ou égale à $2p\pi$, et, comme ces angles sont égaux et au nombre de n, chacun d'eux sera égal à $\frac{2p\pi}{n}$.

Donc *l'angle au centre* $\alpha_{n,p}$ *d'un polygone régulier de l'espèce* p, *ayant* n *côtés, est*

$$\text{(VII)} \qquad \alpha_{n,p} = \frac{2p\pi}{n}.$$

22. *Rayon et apothème d'un polygone égrédient régulier.*—Désignons par $R_{n,p}$ et $r_{n,p}$ le rayon et l'apothème d'un polygone égrédient régulier de n côtés et de l'espèce p. Si $C_{n,p}$ représente le côté de ce polygone, $\frac{1}{2} C_{n,p}$ sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont le premier côté est $r_{n,p}$ et qui a $R_{n,p}$ pour hypoténuse.

Cette hypoténuse $R_{n,p}$ et le côté $r_{n,p}$ comprennent entre eux un angle égal à la moitié de l'angle au centre (VII), ou l'angle

$$\frac{1}{2}\alpha_{n,p} = \frac{p}{n}\pi.$$

Nous avons donc les relations

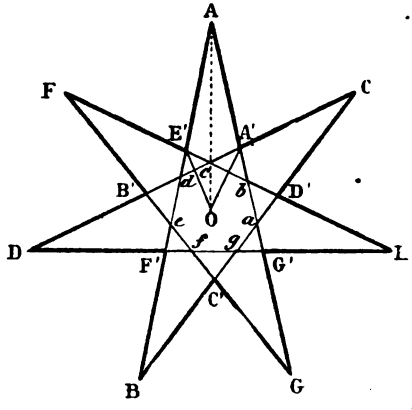
$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} C_{n,p} = 2R_{n,p} \sin \frac{p}{n}\pi, \\ r_{n,p} = R_{n,p} \cos \frac{p}{n}\pi, \\ C_{n,p} = 2r_{n,p} \operatorname{tang} \frac{p}{n}\pi. \end{cases}$$

23. *Surface des polygones égrédients réguliers. — Le polygone égrédient régulier, qui a* n *côtés et se trouve de l'espèce* p, *a pour surface l'expression*

$$\text{(IX)} \quad S_{n,p} = nR^2_{n,p} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}$$

où $R_{n,p}$ *désigne le rayon du cercle circonscrit au polygone.*

Joignons le centre O à un sommet A de notre polygone (fig. 4), ainsi qu'aux deux sommets voisins A′ et E′ du polygone régulier de n côtés et de l'espèce $p-1$ qui sont situés sur les côtés issus du sommet A dans le polygone de l'espèce p. La surface de notre polygone se composera de n quadrilatères tels que AA′OE′ ou de $2n$ triangles tels que AA′O. Nous avons donc



$$S_{n,p} = 2n\ AA'O.$$

Or, dans le triangle AA′O, le côté AO est égal au rayon $R_{n,p}$ du cercle circonscrit au polygone donné; le côté A′O est égal au rayon $R_{n,p-1}$ du cercle circonscrit au polygone régulier égrédient de n côtés et de l'espèce $p-1$; tandis que l'angle AOA′ est égal à la différence entre la moitié de l'angle au centre de l'espèce p et la moitié de l'angle au centre du polygone régulier de l'espèce $p-1$. Il nous vient donc

$$(1) \qquad S_{n,p} = 2n \cdot \frac{1}{2}\,AO \cdot A'O \sin AOA'$$

$$= nR_{n,p} \cdot R_{n,p-1} \sin\left(\frac{\alpha_{n,p}}{2} - \frac{\alpha_{n,p-1}}{2}\right).$$

Or, par la deuxième des formules (VIII) nous avons

$$r_{n,p-1} = R_{n,p-1} \cos\frac{p-1}{n}\pi;$$

et, comme les polygones réguliers, ayant pour côtés, l'un AG, l'autre A'G' sont circonscrits au même cercle, on a aussi

$$r_{n,p-1} = R_{n,p} \cos \frac{p}{n}\pi.$$

La comparaison de ces deux expressions donne

$$(2) \qquad R_{n,p-1} = R_{n,p} \cdot \frac{\cos \frac{n}{p}\pi}{\cos \frac{p-1}{n}\pi}.$$

D'ailleurs, en vertu de (VII) on a

$$\frac{\alpha_{n,p}}{2} = \frac{p}{n}\pi, \quad \frac{\alpha_{n,p-1}}{2} = \frac{p-1}{n}\pi,$$

d'où

$$\frac{\alpha_{n,p}}{2} - \frac{\alpha_{n,p-1}}{2} = \frac{\pi}{n}.$$

Substituant les valeurs (2) et (3) dans l'expression (1), on tombe sur la formule (IX).

24. *Polygones étoilés et polygones composés.* — Parmi les polygones égrédients, les uns se composent de polygones convexes distincts, d'un même nombre de côtés, qui sont superposés, sans coïncider, de manière à présenter alternativement des angles saillants et des angles rentrants, comme cela a lieu pour l'hexagone égrédient (fig. 2).

D'autres, au contraire, ont un périmètre continu et fermé, comme cela se présente pour l'heptagone égrédient (fig. 3).

Selon l'usage, et suivant Poinsot, nous donnerons le nom de *polygone étoilé* à tout polygone, dont les côtés forment une ligne brisée continue et telle qu'en la parcourant dans le même sens, on revienne au sommet de départ, après avoir passé par tous les autres sommets et une seule fois par chacun d'eux.

Les autres polygones égrédients, s'ils se composent chacun de deux ou plusieurs polygones d'un même nombre de côtés, superposés sans se confondre, pourraient être appelés polygones anétoiles, polygones pseudo-étoilés, polygones rayonnés ou polygones dentelés.

Nous les nommerons simplement *polygones composés.*

25. — Toutes les propriétés que nous venons d'établir, et toutes les expressions que nous avons obtenues, conviennent,

sans distinction, à chacune de ces deux espèces de polygones égrédients.

26. — Poinsot a démontré *qu'il existe autant de polygones étoilés de* n *côtés, qu'il y a d'unités moins une dans la moitié du nombre, qui exprime combien il y a de nombres entiers inférieurs à* n *et premiers avec lui* (Journal de l'École polytechnique, t. IV, p. 21).

Sa démonstration a été donnée par A. Amiot, dans ses *Leçons nouvelles de Géométrie élémentaire:* Paris, 1865, 2me édition, 1re partie, pages 265, 266 et 267. Cette démonstration a été reproduite dans le *Traité de Géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse; Paris, 1866, p. 176.

27. *Polygones réguliers étoilés.* — Considérons un polygone régulier de n côtés et de l'espèce p; ce polygone sera étoilé, si p est premier avec n. Le côté $C_{n,p}$ de ce polygone, exprimé en valeur du rayon $R_{n,p}$ du cercle circonscrit, sera (n° 22)

$$\text{(X)} \qquad C_{n,p} = 2R_{n,p} \sin \frac{p}{n} \pi.$$

Cette formule, combinée avec (IX), nous donnera les côtés et les surfaces des polygones étoilés, qui sont réguliers et qui ont 5, 8, 10, 12, 16, 20, 24, etc. côtés.

28. *Pentagone régulier étoilé.* — Ici nous avons

$$n = 5, \; p = 2;$$

il viendra donc, pour la valeur du côté en fonction du rayon R,

$$\text{(XI)} \qquad C_{5,2} = 2R \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

On trouvera ensuite la surface au moyen de la formule (IX), qui donne

$$S_{5,2} = 5R^2 \frac{\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = 5R^2 . \frac{\sin 36^\circ \cos 72^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{5}{4} R^2 . \frac{\sin 36^\circ}{\cos^2 36^\circ}.$$

ou

$$\text{(XII)} \qquad S_{5,2} = \frac{5}{4} R^2 \sqrt{50 - 22\sqrt{5}}.$$

29. *Octogone régulier étoilé.* — Puisque $n = 8$ et $p = 3$, on a :

$$\text{(XIII)}\quad C_{8,3} = 2R \sin\frac{3\pi}{8} = 2R\cos\frac{\pi}{8} = R\sqrt{2+\sqrt{2}}\,;$$

$$\text{(XIV)}\quad S_{8,3} = 8R^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{2\pi}{8}} = 8R^2 . \frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 4R^2 . \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

ou $\quad S_{8,3} = 4R^2(\sqrt{2}-1)$.

30. *Décagone régulier étoilé.* — On a ici

$$n = 10,\ p = 3\,;$$

par suite il vient

$$\text{(XV)}\quad C_{10,3} = 2R\sin\frac{3\pi}{10} = 2R\sin 54^\circ = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1)\,;$$

$$S_{10,3} = 10R^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}} 10R_2 . \frac{\sin 18^\circ \cos 54^\circ}{\cos 36^\circ} =$$

$$10R_2 . \frac{\sin 18^\circ \sin 36^\circ}{\cos 36^\circ},$$

ou

$$\text{(XVI)}\quad S_{10,3} = 5R^2 . \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{5}{2}R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$

Nous avons trouvé que $S_{5,2} = 5R^2 . \dfrac{\sin 36^\circ \sin 18}{\cos 30}$;

de sorte que nous avons

$$S_{10,3} = 2S_{5,2}.$$

Donc *la surface du décagone régulier étoilé est double de la surface du pentagone régulier étoilé, qui est inscrit dans le même cercle.*

31. — Ce résultat n'est qu'une application d'un théorème général, dont voici l'énoncé :

La surface d'un polygone régulier, qui a un nombre impair n *de côtés et qui est de son espèce la plus élevée* $\frac{n-1}{2}$, *est la moitié de la surface du polygone régulier inscrit dans le même cercle, qui a un nombre double* 2n *de côtés et qui est aussi de son espèce la plus élevée* n — 2.

En effet, si nous appelons R le rayon du cercle circonscrit à nos deux polygones, la surface du premier polygone sera, d'après la formule (IX),

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{n-1}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}}$$

pendant que celle du second polygone régulier sera

$$S_{2n,n-2} = 2nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n-2}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi}$$

Or ces deux expressions ont le même dénominateur $\cos\frac{n-3}{2n}\pi$. Au numérateur de la première nous avons

$$\sin\frac{\pi}{n} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\pi = \cos\frac{n-2}{2n}\pi,$$

et

$$\cos\frac{n-1}{2n}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n-1}{2n}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2n}\right)\pi = \sin\frac{\pi}{2n}$$

par suite les deux fractions

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{n-1}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi}, \quad \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n-2}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi}$$

sont égales entre elles. Donc il vient

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2} S_{2n,n-2}.$$

Si l'on donne à n successivement les valeurs 3, 5, 15, 17, etc.,

pour $n = 3$, on aura $\frac{n-1}{2} = 1$, $2n = 6$, $n-2 = 1$;

$n = 5$, $\frac{n-1}{2} = 2$, $2n = 10$, $n-2 = 3$;

$n = 15$, $\frac{n-1}{2} = 7$, $2n = 30$, $n-2 = 13$;

$n = 17$, $\frac{n-1}{2} = 8$, $2n = 34$, $n-2 = 15$.

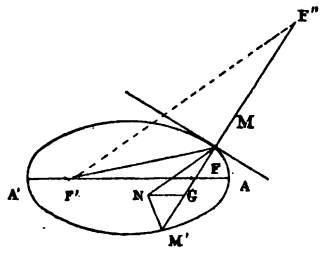
Ainsi *le triangle équilatéral est la moitié de l'hexagone régulier, qui est inscrit dans le même cercle; la surface du pentagone régulier étoilé et la moitié de la surface du dodécagone régulier étoilé ; le polygone régulier de* 15 *côtés et de la* 7me *espèce est la moitié du polygone régulier de* 30 *côtés et de* 13me *espèce, etc.*

QUESTION DE GÉOMÉTRIE,

par M. Cochez.

Théorème : *Si par le foyer* F *d'une conique on mène une corde et les normales* MN, M'N *aux extrémités de cette corde, la droite menée par le point de concours des normales parallèlement au grand axe divise la corde en deux parties égales.*

Ce théorème a été démontré analytiquement par M. Larrose (*N^{lles} Ann.* de Terquem, XIX, 85). On peut le démontrer géométriquement de la manière suivante :



Prolongeons MF d'une quantité MF'' = MF'.

La droite F'F'' est parallèle à MN. Donc les triangles MGN, FF'F'' sont semblables et l'on a

$$\frac{MG}{FF''} = \frac{NG}{FF'}$$

d'où $$\frac{MG}{NG} = \frac{FF''}{FF'} = \frac{a}{c}$$

de même $$\frac{M'G}{NG} = \frac{a}{c}$$

donc $$MG = M'G ;$$ c. q. f. d.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
D'UN THÉORÈME D'ALGÈBRE

par M. Coches.

Décomposition d'une fraction en une somme de fractions simples.

Bien que du domaine de l'analyse mathématique, la décomposition d'une fraction en une somme de fractions simples peut, dans un certain nombre de cas, être considérée comme une application importante de la théorie des coefficients indéterminés.

En effet, soit la fraction

$$\frac{2a - x}{a^2 - x^2}$$

cette expression peut s'écrire

$$\frac{2a - x}{(a + x)(a - x)}$$

Cherchons quelles sont les deux fractions simples dont elle est la somme. Si $\frac{X_1}{a + x}$ et $\frac{X_2}{a - x}$ sont ces deux fractions, on aura

$$\frac{2a - x}{a^2 - x^2} = \frac{X_1}{a + x} + \frac{X_2}{a - x}$$

X_1 et X_2 étant des numérateurs à déterminer. Réduisant au même dénominateur dans le second membre, nous obtiendrons

$$\frac{2a - x}{a^2 - x^2} = \frac{(X_1 + X_2)\,a - (X_1 - X_2)\,x}{a^2 - x^2}$$

ou $$2a - x = (X_1 + X_2)\,a - (X_1 - X_2)\,x.$$

Or ces deux polynômes devant être identiques pour toute valeur donnée à x, on a, d'après le théorème fondamental de la théorie des coefficients indéterminés,

$$X_1 + X_2 = 2$$
$$X_1 - X_2 = 1$$

d'où $$X_1 = \frac{3}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1}{2}$$

par suite

$$\frac{2a - x}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{3}{2}}{a + x} + \frac{\frac{1}{2}}{a - x} = \frac{3}{2\,(a + x)} + \frac{1}{2(a - x)}$$

Cas général. — Considérons l'expression

$$\frac{f\,(x)}{(x - a_1)\,(x - a_2)\,.\,\ldots\,(x - a_n)}$$

comme la somme de n fractions algébriques, il s'agit de déterminer les fractions génératrices de cette somme.

Soient

$$\frac{X_1}{x - a_1}, \frac{X_2}{x - a_2}, \frac{X_3}{x - a_3} \ldots\ldots \frac{X_n}{x - a_n}$$

ces fractions, on doit avoir (1)

$$\frac{f\,(x)}{(x - a_1)\,(x - a_2)\,\ldots\ldots\,(x - a_n)} = \frac{X_1}{x - a_1} + \frac{X_2}{x - a_2} + \ldots\ldots + \frac{X_n}{x - a_n}$$

et en multipliant de part et d'autre par $x - a_1$,

$$\frac{f\,(x)}{(x - a_2)\,(x - a_3)\,\ldots\ldots\,(x - a_n)} = X_1 + (x - a_1)\left[\frac{X_2}{x - a_2} + \frac{X_3}{x - a_3} + \ldots\ldots \frac{X_n}{x - a_n}\right].$$

Cette relation devant avoir lieu pour toute valeur de x, sera vraie en particulier pour $x = a_1$, et dans ce cas on aura

$$X_1 = \frac{f\,(a_1)}{(a_1 - a_2)\,(a_1 - a_3)\,\ldots\ldots\,(a_1 - a_n)}.$$

De même, si l'on multiplie l'identité (1) de part et d'autre par $x - a_2$, et si dans le résultat obtenu on fait comme précédemment $x = a_2$, on trouve

$$X_2 = \frac{f\,(a_2)}{(a_2 - a_1)\,(a_2 - a_3)\,\ldots\ldots\,(a_2 - a_n)}$$

.
.
.
.
.

Et ainsi de suite.

en général on aura

$$X_n = \frac{f(a_n)}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})}$$

Expression qui peut servir à calculer chacune des fractions simples.

Remplaçons X_1, X_2.... par les valeurs trouvées, on a finalement :

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{f(a_1)}{(x-a_1)(a_1-a_2\ldots)(a_1-a_n)}$$
$$+ \frac{f(a_2)}{(x-a_2)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}$$
$$+$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{(a_n) \quad f}{(x-a_n)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

Applications numériques.

Soit l'expression

$$\frac{6x^2-25x+23}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

à décomposer en une somme de trois fractions simples, on a

$$\frac{6x^2-25x+23}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{X_1}{x-1} + \frac{X_2}{x-2} + \frac{X_3}{x-3}$$

et en appliquant les calculs précédents, on trouve

$$X_1 = 2, \quad X_2 = 3, \quad X_3 = 1$$

donc

$$\frac{6x^2-25x+23}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

Soit encore $\dfrac{x-1}{3x^2-7x+2}$ *(Bacc. Lyon, 1875).*

Décomposant le dénominateur en facteurs du premier degré on trouve

$$\frac{x-1}{(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{X_1}{x-2} + \frac{X_2}{x-\frac{1}{3}}$$

d'où l'on tire $X_n = \frac{1}{5}, X_2 = \frac{2}{15}$

par suite

$$\frac{x-1}{3x^2-7x+2} = \frac{1}{5(x-2)} + \frac{2}{15\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE.

On sait que la section du tore par un plan bitangent est composée de deux cercles. L'étude des plans tangents aux surfaces de révolution, et même des sections planes de ces surfaces rentrant dans les cours élémentaires de géométrie descriptive, je me propose de donner ici une démonstration géométrique de cette proposition.

Le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien du point de contact, et ce plan méridien contient la normale. Donc, les deux points de contact du plan bitangent seront sur un même méridien, que nous prendrons pour plan de front. La trace du plan tangent sur ce plan de front sera tangente aux deux cercles de contour apparent et par suite passera par le centre de la surface. Si nous coupons la figure par des plans méridiens, suivant la méthode ordinaire, ces plans méridiens couperont la surface suivant deux cercles et le plan suivant une droite passant par le centre de

la surface. Cela posé, si nous ramenons l'un de ces plans à être de front, le méridien s'appliquera sur le contour apparent vertical, et la droite d'intersection prendra une position telle que $e'_1 f'_1$. Nous trouverons les points d'intersection de cette droite avec le contour apparent et nous les ramènerons sur la trace verticale du plan d'abord, puis sur la trace horizontale du plan méridien donné. Il est facile de voir que le centre de la surface est le centre de similitude interne des deux circonférences. Je dis que, dans l'espace, les points qui se rabattent sur chaque sécante suivant des points anti-homologues sont sur une même circonférence. En effet, prenons par exemple les points e'_1 et f'_1. On a $o'e'_1 = o'h'_1$. Donc $o'e'_1 \times o'f'_1 = o'h'_1 \times o'f'_1 = o'b'^2 = o'b' \times o'a'$. On démontrerait de même que les points projetés horizontalement en c et d sont sur la circonférence qui passe par les quatre autres points. La symétrie montre que la figure complète contient deux circonférences.

Il résulte de là que l'on pourra construire immédiatement la projection horizontale de l'une de ces circonférences, puisque cette projection est une ellipse. En effet, cd est le grand axe de cette ellipse. Pour avoir la grandeur du petit axe, il suffira de projeter sur la trace verticale du plan bitangent la ligne $c'd'$; la projection sera la grandeur cherchée. Or, ce petit axe n'est pas autre chose que la ligne $a'b'$, puisque $c'd'$ est égal à la distance des centres des deux circonférences dont se compose le méridien.

Il est facile en outre de voir que la projection horizontale du centre de la surface est foyer de chacune des deux ellipses dont se compose la projection horizontale de la section. En effet, soit i le milieu du grand axe cd; on a $od = R + r$, en appelant R le rayon du cercle moyen et r le rayon du cercle générateur ; puis $di = R$; donc $oi = r$; de plus $o'b'^2 = R^2 - r^2$; donc $oi^2 + o'b'^2 = R^2$; c'est-à-dire que la distance de l'extrémité du petit axe au point o est égale au demi-grand axe. Le point o est donc un foyer.

A. M.

CONCOURS DE L'ÉCOLE CENTRALE.

Compositions mathématiques.

Soient
$$a = 235^m,684$$
$$b = 412^m,567$$
$$c = 351^m,648$$
les trois côtés d'un triangle; calculer les angles et la surface de ce triangle. *(Août 1872.)*

On donne dans un plan un cercle de rayon r, un diamètre AA′ de ce cercle, une droite OL et un point P équidistant des extrémités du diamètre AA′. On mène une parallèle à AA′. On fait passer une hyperbole équilatère par les points où cette droite rencontre le cercle et par les extrémités du diamètre AA′.

On imagine que la parallèle à AA′ se déplace dans le plan du cercle, et on demande les lieux décrits :

1° Par les sommets;

2° Par les foyers de l'hyperbole équilatère;

3° Par les points de contact des tangentes menées à l'hyperbole équilatère parallèlement à la direction OL;

4° Par le pied des normales menées à cette même hyperbole équilatère par le point P. *(Août 1872.)*

On donne les longueurs des trois côtés
$$a = 17618^m,19$$
$$b = 29363^m,65$$
$$c = 23490^m,92$$
d'un triangle rectiligne. Calculer les trois angles et l'aire de ce triangle. *(Octobre 1872.)*

On donne dans un plan deux axes ox et oy et deux points C et D dont les coordonnées par rapport à ces axes sont

$$C \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array} \right. \qquad D \left| \begin{array}{l} x = 3. \\ y = 4. \end{array} \right.$$

Une droite PQ dont le coefficient angulaire est m coupe l'axe des x en P et l'axe des y en Q.

On demande 1° L'équation du lieu décrit par le point de rencontre M des droites CP et DQ, lorsque la droite PQ se transporte dans le plan parallèlement à elle-même;

2° Les différents genres de courbes que cette équation peut représenter suivant la valeur du coefficient angulaire m de la droite PQ;

3° Le lieu des centres des courbes qu'on obtient lorsqu'on fait varier, d'une manière continue, le coefficient m de la droite PQ. *(Octobre 1872.)*

Calculer les angles et l'aire d'un triangle dont les côtés sont

$$a = 1618^{m},91$$
$$b = 1028^{m},39$$
$$c = 1682^{m},11$$

(Août 1873.)

Soit $F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, l'équation d'une parabole rapportée à deux axes rectangulaires :

Démontrer que l'axe de cette parole est représenté par

$$F'(x,y) + \frac{2C}{B}F'(x,y) = 0$$

Cela posé : on donne un cercle fixe O et un diamètre fixe AA′ de ce cercle. On mène une droite LL′ perpendiculaire à AA′; trouver le lieu des sommets des paraboles qui passent par les points A et A′ et par les points où la droite LL′ rencontre le cercle O quand cette droite se meut parallèlement à elle-même. Sur ce lieu, on séparera les parties qui correspondent au cas où la droite LL′ rencontre le cercle O en des points réels, de celles qui correspondent au cas où elle rencontre le cercle en des points imaginaires.

(Août 1873.)

On donne deux côtés d'un triangle et l'angle compris. Calculer les autres angles, le 3e côté et la surface.

$$a = 256^{m},478$$
$$b = 145^{m},672$$
$$C = 37^{\circ}\,42'\,53'',64.$$

(Octobre 1873.)

On donne deux axes rectangulaires ox et oy et la droite LL′ dont l'équation est $x - h = 0$. On considère toutes

les coniques qui ont un foyer en O et pour lesquelles la droite LL′ est la directrice correspondant à ce foyer. Former l'équation du lieu des points de contact des tangentes menées à toutes ces coniques, parallèlement à une direction de coefficient angulaire m et construire ce lieu dans le cas particulier où $m = 1$. *(Octobre 1873.)*

On donne dans un triangle

$$a = 3257^{m},894$$
$$b = 5431^{m},782$$
$$c = 7046^{m},358$$

Calculer les trois angles et l'aire du triangle.

(Août 1874.)

Étant donnés dans un plan deux points fixes F et A :

1° Former l'équation générale des courbes du second degré qui, situées dans ce plan, ont un foyer en F et un sommet de l'axe focal en A;

2° Déterminer quel est le genre de la courbe représentée par cette équation générale, selon la grandeur du paramètre variable qu'elle renferme.

Disposer de ce paramètre variable de façon que la courbe du second degré passe par un point donné P, et discuter le nombre et le genre des solutions obtenues, selon la position du point P dans le plan. *(Août 1874.)*

Soient

$$a = 25647^{m},54$$
$$b = 43721^{m},76$$
$$c = 37^{\circ}\,41'\,52'',47$$

Calculer les deux autres angles, le troisième côté et la surface. *(Octobre 1874.)*

On donne un cercle O de rayon r rapporté aux axes rectangulaire ox et oy. On mène à ce cercle une sécante CD parallèle à la direction dont le coefficient angulaire est M. Cela posé on demande de trouver :

1° L'équation générale des hyperboles équilatères passant par les quatre points A, B, C, D où le cercle O rencontre l'axe de x et la sécante CD, quand on fait mouvoir cette sécante parallèlement à elle-même;

2° Le lieu des points de contact des tangentes menées à

ces hyperboles perpendiculairement à une direction donnée;

3° Le lieu des sommets du lieu précédent (2e question) quand on fait varier le coefficient angulaire m.

(Octobre 1874.)

On donne dans un triangle

$$a = 7456^m,312$$
$$b = 3217^m,315$$
$$C = 112° \; 33' \; 54'', 28.$$

Calculer les deux autres angles et le troisième côté; ainsi que l'aire du triangle. *(Août 1875.)*

Étant donnés deux axes rectangulaires ox, oy, et sur l'axe oy un point A; on considère les hyperboles équilatères qui passent par le point A et dont une directrice est l'axe oy. On demande

1° Le lieu de celui des foyers de ces hyperboles qui correspond à la directrice oy;

2° Le lieu du centre de ces mêmes hyperboles;

3° Le lieu de leurs sommets. *(Août 1875.)*

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés $a = 1764^m,42$

$$b = 2175^m,64$$
$$c = 2346^m,58$$

(Octobre 1875.)

On donne une circonférence et un point fixe P sur un de ses diamètres AB; par le point P on mène à cette circonférence la sécante PCD qui la rencontre en C et en D, et par les quatre points A, B, C, D on fait passer une hyperbole équilatère.

1° Trouver l'équation de cette hyperbole;

2° Trouver le lieu du centre de cette hyperbole quand la sécante PDC tourne autour du point P;

3° Trouver dans les mêmes conditions le lieu des points de contact des tangentes menées à cette hyperbole perpendiculairement à AB;

4° Indiquer, d'après ce qui précède, la construction géométrique des asymptotes d'une quelconque des hyperboles considérées, et appliquer cette construction au cas ou la sécante PCD passe par l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à AB. *(Octobre 1875.)*

Épures.

Intersection d'un hyperboloïde et d'un cône.

L'axe de l'hyperboloïde est vertical. Le pied de cet axe est à $0^m,08$ de la ligne de terre. Le rayon de la trace horizontale de l'hyperboloïde est de 8 centimètres 1/2. Celui du cercle de gorge est de 3 centimètres. Enfin, les génératrices de l'hyperboloïde sont inclinées à 45° sur le plan horizontal.

Le cône est de révolution ; son axe est parallèle à la ligne de terre et passe par le centre de l'hyperboloïde. Il est circonscrit à la sphère engendrée par le cercle de gorge de l'hyperboloïde. On représentera les deux surfaces ainsi définies et on construira les projections de leur intersection. On mènera la tangente en un point de cette intersection. On justifiera enfin les résultats obtenus par une légende explicative très-succincte. *(1872.)*

Une sphère dont le rayon est égal à 7 centimètres est tangente aux deux plans de projection. Soient A le point le plus haut de la sphère et B l'une des extrémités du diamètre parallèle à la ligne de terre. On demande de trouver l'intersection de cette sphère et du cône engendré par la verticale du point A tournant autour de AB. On indiquera les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

On représentera la sphère en supposant enlevée la partie située dans l'intérieur du cône. *(1872.)*

On donne une sphère de 0,08 de rayon et dont le centre O est situé dans le plan horizontal de projection à 0,16 en avant de la ligne de terre.

Dans le grand cercle horizontal, on mène une corde CD perpendiculaire à la ligne de terre et égale au côté du carré inscrit. Sur le diamètre COC′, on prend de part et d'autre du centre O deux longueurs OA et OB égales à 0,05, enfin on projette les points A et B en α et β sur la corde CD.

On demande de représenter la sphère en supprimant la partie de ce corps comprise dans le tronc de cône que le trapèze $A\alpha\beta B$ engendre en tournant autour de $\alpha\beta$.

On indiquera à l'encre rouge les constructions faites pour

obtenir un point quelconque de l'intersection de la sphère et de la surface latérale du tronc de cône, ainsi que la tangente en ce point. Dimensions du cadre $0^m,27$ et $0^m,45$. On placera la ligne de terre parallèlement aux petits côtés de la feuille à $0^m,16$ du bord supérieur du cadre. *(1873.)*

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont les arêtes ont 1 décimètre de longueur et dont la base ABC est située dans le plan horizontal de projection.

Soient S la sphère circonscrite à ce tétraèdre et C le cylindre dont la section droite est le cercle inscrit dans une face latérale DAB.

On demande de représenter, en projection horizontale, la partie de la sphère S qui reste lorsqu'on a enlevé la partie de ce corps comprise dans le cylindre C. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir la projection horizontale d'un point quelconque de l'intersection des surfaces du cylindre et de la sphère et de la tangente en ce point. *(1873.)*

On donne dans le plan horizontal de projection un rectangle ABCD dont les côtés AB et BC sont égaux respectivement à $0^m,10$ et à $0^m,06$. Le point I étant le centre de ce rectangle, on demande :

1° De trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère décrite sur la diagonale AC comme diamètre et du tore qu'engendre le cercle circonscrit au triangle BCI en tournant autour de AD ;

2° De représenter en projection horizontale la sphère supposée pleine et existant seule, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le tore.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir en projection horizontale un point quelconque de l'intersection du tore et de la sphère et la tangente en ce point. *(1874.)*

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est égal à 10 centimètres et dont la base ABC repose sur le plan horizontal de projection.

On demande: 1° de trouver la projection horizontale de la sphère ayant AD pour diamètre et du cylindre de révo-

lution ayant la droite AB pour axe et 6 centimètres de rayon;

2° De représenter en projection horizontale la sphère supposée pleine et existant seule, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cylindre.

On indiquera à l'encre rouge les tracés effectués pour obtenir en projection horizontale un point quelconque de l'intersection du cylindre et de la sphère et la tangente en ce point. *(1874.)*

Un tétraèdre régulier ABCD, dont le côté est égal à $0^m,15$, repose par la face ABC sur le plan horizontal de projection. Le cercle horizontal décrit sur BC comme diamètre est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à AD.

On demande : 1° de trouver la projection horizontale de l'intersection de ce cylindre et de la sphère circonscrite au tétraèdre; 2° de représenter en projection horizontale le solide commun à la sphère et au cylindre.

On tracera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection de la sphère et du cylindre et la tangente en ce point. — On expliquera brièvement ces constructions dans une légende inscrite sur la feuille même. *(1875.)*

On donne dans le plan horizontal de projection un cercle A de 8 centimètres de rayon, et un cercle B de 4 centimètres de rayon, tangent intérieurement au premier, en un point tel que la tangente θ en ce point soit perpendiculaire à la ligne de terre.

On demande : 1° de trouver l'intersection du tore engendré par la rotation du cercle B autour de la tangente θ et du cylindre dont le cercle A est la section droite; 2° de représenter le tore supposé plein et existant seul en supprimant la partie comprise dans le cylindre.

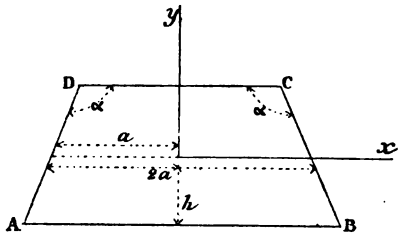
On tracera à l'encre rouge les constructions faites pour trouver un point quelconque de l'intersection du tore et du cylindre et la tangente en ce point. On expliquera brièvement ces constructions dans une légende. *(1875.)*

CONCOURS DE L'ÉCOLE CENTRALE POUR 1877.

DEUXIÈME SESSION.

Géométrie analytique.

On donne un trapèze isoscèle ABCD dont la hauteur est $2h$; la demi-somme des bases, $2a$; et les angles obtus α. On considère toutes les coniques circonscrites à ce trapèze.



1° Former l'équation générale de ces coniques;

2° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à chacune d'elles parallèlement au côté BC, et construire ce lieu, après avoir vérifié que le côté BC en fait partie;

3° Étant donné un point de ce lieu, reconnaître le genre de la conique, circonscrite au trapèze qui passe par ce point.

Calcul trigonométrique.

Les trois côtés d'un triangle sont :

$$a = 4376^{m},76$$
$$b = 3564^{m},37$$
$$c = 2754^{m},82$$

Calculer les angles et la surface.

Physique et Chimie.

I. — Un manomètre à air comprimé, dont les deux branches sont verticales et de diamètres différents, est en communication avec un récipient de machine pneumatique. Ce

manomètre renferme de l'air sous la pression de $0^m,760$ et la portion AB de la branche fermée, occupée par cet air, a une longueur de $0^m,30$. Le rapport des sections des branches CD et AB est égal à 2. On raréfie l'air contenu dans le récipient. Quelle différence de niveau faut-il produire entre les deux colonnes de mercure, pour que la pression dans ce récipient devienne de $0^m,760$ à $0^m,156$?

II. — Préparation des acides du phosphore $PhO^5,3HO$ et $PhO^5,2HO$.

III. — Quel est le poids du phosphore contenu dans 28 litres d'hydrogène phosphoré (PhH^3)?

Équivalents $\begin{cases} Ph = 32 \\ H = 1 \end{cases}$ **Densité de l'hydrogène phosphoré** $\delta = 1,185$
Poids d'un litre d'air 1,293

Épure.

Intersection d'un tore et d'un cône de révolution.

L'axe du tore *yy'* est vertical, à $0^m,130$ du plan vertical de projection, et au milieu de la feuille; le cercle méridien a $0^m,055$ de rayon; il est tangent à l'axe du tore et au plan horizontal de projection. — Le cône touche le plan horizontal suivant une génératrice *sa*, *s'a'*, parallèle à la ligne de terre et rencontrant l'axe du tore; son sommet *ss'* est à $0^m,055$ de l'axe du tore et son angle au sommet est de 40^0.

On demande de représenter le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection, et la tangente en ce point.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Tore et cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,260$ du petit côté inférieur.

PROBLÈMES

DONNÉS AU CONCOURS DE L'ÉCOLE DES MINEURS DE SAINT-ÉTIENNE.

(Octobre 1877).

Algèbre et géométrie.

1° Un trapèze isoscèle de hauteur z et de bases $2x$ et $2y$ a une surface constante a^2. On demande 1° la condition pour que le trapèze puisse être circonscrit à un cercle, 2° la condition pour que le cercle inscrit soit maximum?

2° Sur le rayon OA d'un cercle comme diamètre, on décrit un deuxième cercle, lequel, par conséquent, a pour rayon la moitié du rayon du premier cercle et est tangent intérieurement à celui-ci. On fait rouler sans glissement ce cercle intérieur sur le premier. Démontrer que dans ce mouvement le point M du cercle intérieur, qui à l'origine était en contact avec le point A du cercle fixe reste constamment sur le diamètre OA du cercle fixe.

3° Déterminer à 0,001 près le maximum et le minimum de la fonction

$$\frac{5x^2 - 4x + 7}{2x + 9}$$

et les valeurs de x correspondantes.

Trigonométrie.

1° Par un point O pris sur le prolongement du diamètre d'un cercle CO on mène la sécante quelconque OKK', on demande de calculer

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{KCO} \times \operatorname{tg} \frac{1}{2} \mathrm{K'CO}.$$

2° Résoudre un triangle connaissant :

$$a = 5892{,}51 \qquad b = 7705{,}59$$
$$c = 22°37'11'',52$$

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Süter** de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*. Voir page 84.)

La représentation proprement dite des nombres à l'aide de symboles numériques fut très-différente chez les divers peuples. La plupart se servaient des lettres de l'alphabet pour désigner les chiffres; mais dans la manière de les grouper, se présentent des divergences sensibles. Nous ne pouvons ici insister sur ce sujet; nous allons toutefois

indiquer les deux principales méthodes. L'une attribuait aux symboles, outre leur valeur absolue, une valeur dépendant de leur rang. L'autre ne procédait pas ainsi. Cette dernière était suivie par presque tous les anciens peuples, et aussi par les Grecs et les Romains. La première pratiquée d'abord par les Indiens fut suivie par les Arabes et plus tard par les peuples modernes.

Nous étudierons de plus près cette dernière question dans le Ve chapitre de l'ouvrage (1).

Voilà tout ce que nous avons à dire sur l'état de l'arithmétique chez les peuples les plus anciens. Il est à présumer que la plupart d'entre eux durent porter cette science à un degré remarquable de perfectionnement, afin de pouvoir diriger leurs connaissances astronomiques ainsi que leurs opérations commerciales.

Chapitre II.

La succession et le retour annuel des occupations successives de l'homme des champs, du chasseur; l'apparition régulière et la disparition des oiseaux de passage et les autres phénomènes périodiques de la nature amenèrent les peuples à fixer l'année civile; ils lui accordèrent un nombre entier de jours et la divisèrent en mois et en saisons.

L'observation des apparitions dans le ciel étoilé, la marche du soleil à travers les constellations, son retour périodique à la même étoile fixe et les autres phénomènes astronomiques fixèrent la durée de l'année naturelle ou sidérale.

Mettre en accord les deux années civile et sidérale; établir, pour compter le temps, une méthode qui tint compte de ces deux périodes : c'est dans cette recherche que l'on trouve les traces les plus anciennes des travaux scientifiques des peuples civilisés. Bientôt ces premières connaissances s'élargirent et se complétèrent. En comparant l'année lunaire à l'année sidérale, en tenant compte de la précession des équinoxes et de l'année tropique qui

(1) Ch. V. — Des Arabes et des autres peuples de l'Orient.

en résulte, en déterminant rigoureusement l'obliquité de l'écliptique, ainsi que plusieurs autres facteurs influents dans la mesure du temps, les anciens apportèrent une exactitude remarquable dans leur calcul.

La durée et les autres particularités du *cycle* étaient très-variées chez les divers peuples. Les vieux écrivains mentionnent surtout les périodes *lunisolaires* des Chaldéens qui, en astronomie, occupent le premier rang et font remonter leurs observations jusqu'aux temps fabuleux. La plupart des auteurs les font arriver jusqu'à l'an 2000 avant J.-C.; mais les inscriptions, les témoignages conservés et transmis par Ptolémée, les observations de trois éclipses de lune rapportées par lui, datent des Nabonassars, vers l'an 719 et 720 avant J.-C.

La principale et la plus fameuse période de la chronologie des Chaldéens est le *saros* qui dure 223 lunaisons ou 6585 jours 11 heures, après lesquels la lune reprend de nouveau les mêmes positions par rapport au soleil (1). D'ailleurs l'astronome arabe Albategnius nous apprend que les Chaldéens avaient pris pour la durée de l'année sidérale 365 jours, 6 heures, 11 minutes, ce qui nous porte nécessairement à conclure que ce peuple connaissait la précession des équinoxes.

D'après Hérodote, les Chaldéens doivent aussi avoir connu les cadrans solaires. En ce qui concerne la cause et l'explication des éclipses, la forme et les dimensions de la terre, ils étaient presque aussi arriérés que la plupart des autres peuples anciens. Pour arriver à une notion exacte de ces derniers éléments astronomiques, il fallait quelque chose de plus que de simples observations.

Les Égyptiens font remonter leurs annales astronomiques aussi loin que les Chaldéens. Ils mentionnent 373 éclipses de soleil et 832 éclipses de lune qui avaient été observées avant la période d'Alexandrie. Dans l'observation des éclipses, les Égyptiens durent être fort avancés; Thalès, ainsi que l'on sait, avait acquis chez eux cette habileté dans l'astronomie. *(A suivre.)*

(1) Chacune de ces périodes ramène *sensiblement* les éclipses aux mêmes époques et avec les mêmes circonstances.

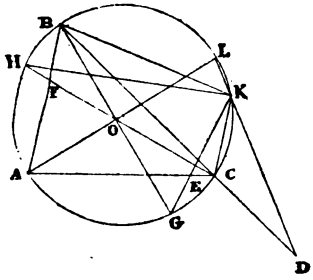
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 10.

Solution par M. Bernard, de Liége.

Soit un triangle ABC, *inscrit dans un cercle; par un point* K *quelconque, pris sur ce cercle on élève des perpendiculaires aux droites* KA, KB, KC, *lesquelles coupent* BC, CA, AB, *respectivement en des points* D, E, F. *Démontrer que les points* D, E, F, *sont sur une droite passant par le centre du cercle.*

Menons les diamètres passant par les sommets du triangle ABC; soient AL, BG, CH ces diamètres, O le centre du cercle.



Dans l'hexagone inscrit KLACBG les points de concours D, E, O des côtés opposés sont en ligne droite; il en est de même des points D, O, F dans l'hexagone KLABCH. Donc les points D, E, O, F sont en ligne droite; c. q. f. d.

Remarque. — Cette propriété subsiste pour les points D, E, F quel que soit le point K, dans le plan du cercle.

Nota. — M. Jullidière, de Mont-de-Marsan, a résolu la même question.

QUESTION 15.

Solution par M. Jullidière, élève du Lycée de Mont-de-Marsan.

L'expression $a^x b^y c^z$ *est minimum et* $(x+1)(y+1)(z+1)$ *est constant, trouver une relation entre* x, y, z.

Les variations d'un nombre positif étant de même sens que celles de son logarithme, la recherche du minimum de $a^x b^y c^z$ revient à celle du minimum de $\log (a^x b^y c^z)$

ou $$x \log a + y \log b + z \log c$$

ou encore en ajoutant la constante $\log a + \log b + \log c$ à celle du minimum de

(1) $$(x + 1) \log a + (y + 1) \log b + (z + 1) \log c$$

mais si le produit $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ est constant le produit

$$(x + 1) \log a \, (y + 1) \log b \, (z + 1) \log c$$

le sera aussi et l'expression (1) sera la somme de trois nombres dont le produit est constant; cette somme sera minima quand les trois nombres seront égaux; la relation demandée sera donc

$$(x + 1) \log a = (y + 1) \log b = (z + 1) \log c$$

ou encore

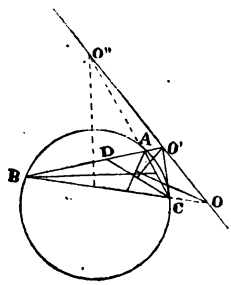
$$a^{x+1} = b^{y+1} = c^{z+1}.$$

Nota. — M. Mahieu, du lycée de Caen, a résolu la même question.

QUESTION 47.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Les perpendiculaires menées aux milieux des bissectrices des angles d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points qui sont en ligne droite.



Soit ABC le triangle, traçons la circonférence circonscrite; il s'agit de démontrer que les points O, O', O'' sont en ligne droite.

Pour cela nous remarquerons que les droites O'D, O'C sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire; le triangle O'DC est donc isoscèle et

$$O'\hat{D}C = O'\hat{C}D.$$

Mais $\qquad O'\hat{D}C = O'\hat{B}C + D\hat{C}B = O'\hat{B}C + A\hat{C}D$

donc $\qquad O'\hat{C}A = A\hat{B}C$

or l'angle ABC a pour mesure $\frac{1}{2}$ arc AC; pour que l'angle O'CA formé par une corde AC et une droite O'C lui soit égal, il faut que O'C soit tangente en C à la circonférence.

Dès lors en vertu du théorème suivant : *un cercle étant circonscrit à un triangle* ABC, *si par chaque sommet du triangle on mène une tangente au cercle, et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre du côté opposé, les trois points de rencontre seront en ligne droite* (Questions de géométrie de Desboves, 2e édit., § 5, page 4), les points O, O', O'' sont en ligne droite.

Nota. — **La même question a été résolue par M. Nettre, de Nancy.**

QUESTION 48.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur plus petit commun multiple.

Soient x et y les deux nombres cherchés; a leur somme, μ leur plus grand commun multiple. Δ le p.g.c.d.

On a
$$x + y = a$$
$$xy = \Delta\mu \qquad (1)$$
Δ est le p.g.c.d. de a et de μ. [illegible]

Divisons chacun des nombres par leur plus grand commun diviseur et appelons q et q' les quotients respectifs, qui sont premiers entre eux, de sorte que

$$\frac{x}{\Delta} = q, \qquad \frac{y}{\Delta} = q'$$

ou
$$\frac{\Delta}{x} = \frac{1}{q}, \qquad \frac{\Delta}{y} = \frac{1}{q'}$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités, il vient

$$\frac{\Delta\,(x + y)}{xy} = \frac{q + q'}{qq'}$$

ou en vertu des équations (1)

$$\frac{a}{\mu} = \frac{q + q'}{qq'}.$$

q et q' étant premiers entre eux, leur somme et leur produit sont aussi premiers entre eux et la fraction $\frac{q+q'}{qq'}$ est irréductible. Si donc a et μ étant donnés en nombres, on réduit $\frac{a}{\mu}$ à sa plus simple expression, on pourra poser

$$q + q' = a'$$
$$qq' = \mu'$$

résoudre ce système et déterminer ensuite facilement x et y.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Hugentobler, de Boppelsem (Suisse); Bruyaud, de Troyes; Perrin, de Clermont-Ferrand.

QUESTIONS PROPOSÉES

79. — Le produit de quatre nombres entiers consécutifs ne peut pas être un carré.

80. — Dans un triangle en appelant a, b, c les côtés, h, h', h'' les hauteurs, r', r'', r''' les rayons des cercles ex-inscrits, S la surface, p le demi-périmètre, on a la relation

$$\cot g \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2} \cot g \frac{C}{2} = 8p^3S^3$$

Avis. Nous prions nos lecteurs de vouloir bien nous faire parvenir les questions données dans les Facultés des sciences aux épreuves écrites du Baccalauréat pour les sessions d'août et de novembre. Nous serions bien aise aussi de pouvoir donner des questions d'examen provenant de quelques sessions précédentes.

Nous invitons les élèves qui nous envoient des solutions de questions proposées à mettre autant que possible chaque question sur une feuille séparée, ce qui rend plus facile le travail d'examen de ces diverses solutions.

J. B.

Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS.— 16870-7.

THEORIE DE L'INVERSION

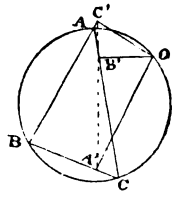
OU

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

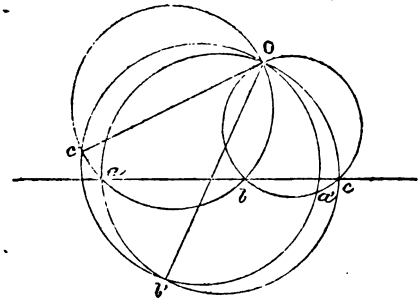
par M. Cochez.

(*Suite*, voir page 321.)

XV. — Avant d'exposer les principes généraux de la transformation des propriétés métriques, linéaires et angulaires, nous donnerons quelques applications simples de la méthode précédente, soit pour la transformation des énoncés, soit pour le calcul des éléments d'une figure. Nous commencerons par la transformation du théorème de Simson. On sait que : *Si d'un point* O *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* OA', OB', OC' *sur les trois côtés* BC, CA, AB, *les pieds* A', B', C' *de ces perpendiculaires sont en ligne droite.*



En prenant pour pôle d'inversion le point O, la droite A'B'C' devient une circonférence O*a'b'c'* passant par le pôle. La droite AB devient également une circonférence et puisque cette droite est perpendiculaire à OC', elle deviendra la circonférence décrite sur *oc'* comme diamètre. Le point A, intersection des droites AB et AC, a pour réciproque le point *a* intersection des circonférences décrites sur *ob'* et *oc'* comme diamètres ; les points B et C ont de même pour points réciproques les points *b* et *c*, points d'intersections des circonférences décrites sur *oc'*, *oa'*, et *oa'*, *ob'* comme diamètres. Les trois points A, B, C sont sur une circonférence passant par le pôle ; par conséquent, dans la figure inverse, les points *a*, *b*, *c* sont en ligne droite. On a donc ce théorème :

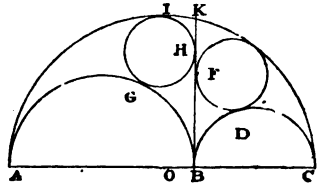


Si l'on joint un point O *d'une circonférence à trois points*

a',b',c', *pris sur cette circonférence et si l'on décrit des circonférences sur les droites* Oa', Ob', Oc', *prises comme diamètres, ces circonférences se coupent deux à deux en trois points* a, b, c, *qui sont en ligne droite.*

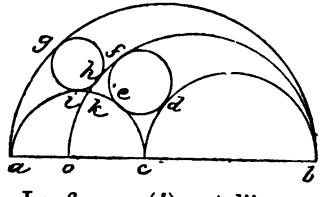
La figure (2) est l'inverse de la figure (1) par rapport au point O pris pour pôle. Nous l'avons, pour plus de clarté, transportée au-dessous de la première.

XVI. — Nous prendrons encore pour exemple la transformation de l'énoncé du théorème suivant : *Soit un demi-cercle* AC, *et* B *un point quelconque du diamètre; on décrit deux autres demi-cercles sur* AB *et* AC *comme diamètres et l'on mène par* B *une perpendiculaire* BK *à* AC; *les deux cercles* DEF, GHI *inscrits de part et d'autre de cette perpendiculaire sont égaux.*



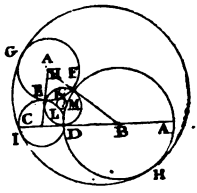
Prenons pour pôle d'inversion le centre O de la circonférence AC. Cette circonférence devient dans l'inversion la circonférence *akc*. Les circonférences décrites sur AB et BC comme diamètres deviennent les circonférences décrites sur *ab* et *bc*. La droite BK devient une circonférence *okb* passant par le pôle et les deux circonférences DEF, GHI se transforment dans les circonférences *def*, *ghi* tangentes à trois des quatre circonférences de la figure inverse. Mais dans la figure primitive ces circonférences sont égales et leurs centres sont à égale distance du pôle. Par conséquent, dans la figure inverse, ces circonférences auront des rayons égaux; on a donc ce théorème :

Théorème. — *Soient* a, b, c, *trois points en ligne droite et* o *le milieu de* ac; *on décrit sur* ab, bc, ca *et* bo *des demi-circonférences*; *les cercles* def, ghi *tangents à trois de ces circonférences ont des rayons égaux.*



La figure (4) est l'inverse de la figure (3) par rapport au point O pris pour pôle. Nous l'avons, pour plus de clarté, transportée au-dessous de la première.

XVII. — *On donne les côtés* a, b, c, *d'un triangle* ABC. *Des sommets* A, B, C, *comme centres, on décrit trois circonférences tangentes deux à deux extérieurement. Déterminer les rayons des deux circonférences tangentes aux trois premières.* (Concours général, 1875.)



Soient α, β, γ les rayons des trois circonférences décrites des points A, B, C comme centres. On a

$$\beta + \gamma = a,$$
$$\gamma + \alpha = b,$$
$$\alpha + \beta = c;$$

donc en désignant par $2p$ le périmètre et par r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC, on a

$$\alpha = p - a,$$
$$\beta = p - b,$$
$$\gamma = p - c,$$

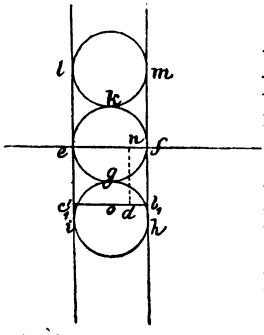
et
$$\alpha + \beta + \gamma = p.$$

Des deux formules connues

$$S = pr, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

on tire
$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

et, par suite
$$r^2 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$



Cela posé, soit D le pôle et μ le module d'inversion ; les circonférences DEC, DFB donnent dans la figure inverse les droites ec_1, fb_1 ; le cercle inscrit DEF devient une parallèle *enf* à b_1c_1 ; la circonférence MFG ayant pour centre le point A est tangente en E et en F aux circonférences ayant pour centres les points C et B ; elle a pour inverse la circonférence *egf* décrite sur *eg* comme diamètre. On a

$$dn = \frac{\mu}{2r}, \quad db_1 = \frac{\mu}{2\beta}, \quad dc_1 = \frac{\mu}{2\gamma}.$$

De plus, ρ désignant le rayon de la circonférence décrite sur ef, on a $\rho = \frac{db_1 + dc_1}{2} = \frac{\mu}{4}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$;

enfin si o est le milieu de b_1c_1 on a

$$do = \frac{dc_1 - db_1}{2} = \frac{\mu}{4}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right).$$

Les circonférences KLM, GHI, tangentes aux trois circonférences données, deviennent dans la figure inverse les circonférences tangentes aux deux droites b_1f, c_1e et à la circonférence egf; ces circonférences ont pour diamètres lm et ih; donc en désignant par p et p' la puissance du pôle par rapport à l'une ou à l'autre de ces circonférences, on trouve pour la première

$$p = do^2 + lc_1^2 - \rho^2,$$

et pour la seconde $p' = do^2 + ic_1^2 - \rho^2$;

mais on a $\quad lc_1 = el + dn = 2\rho + \frac{\mu}{2r}$,

$$ic_1 = ie - nd = 2\rho - \frac{\mu}{2r};$$

par conséquent, en supposant r positif dans le premier cas et négatif dans le second, on a pour l'une ou l'autre de ces puissances, l'expression

$$p = \left(\frac{\mu}{2r} + 2\rho\right)^2 + \frac{\mu^2}{16}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)^2 - \rho^2.$$

Si nous désignons par R l'un ou l'autre des rayons des deux circonférences KLM, GHI, on a d'après le n° VI

$$R = \frac{\mu\rho}{p},$$

et par suite

$$\frac{1}{R} = \frac{\beta\gamma}{r^2(\beta+\gamma)} + \frac{3}{4}\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} + \frac{(\beta-\gamma)^2}{4\beta\gamma(\beta+\gamma)} + \frac{2}{r};$$

ou en remplaçant r^2 par la valeur donnée plus haut :

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha(\beta+\gamma)} + \frac{3(\beta+\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2}{4\beta\gamma(\beta+\gamma)} + \frac{2}{r}.$$

Mais on a $\quad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha(\beta+\gamma)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta+\gamma}$,

$$\frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{3(\beta+\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2}{4\beta\gamma(\beta+\gamma)} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma};$$

par conséquent, on trouve définitivement,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{r}$$

On prendra r avec le signe $+$ pour la circonférence intérieure, et avec le signe — pour la circonférence extérieure.

D'ailleurs en remplaçant r par la valeur trouvée plus haut, on déduit le résultat suivant : *Si* α, β, γ *désignent les rayons de trois circonférences tangentes entre elles deux à deux extérieurement, et* R *le rayon de l'une ou de l'autre des circonférences tangentes aux trois premières on a la formule*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \pm 2\sqrt{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}}.$$

Si deux des circonférences données étaient tangentes à l'intérieur de la troisième, on changerait le signe du rayon de celle-ci. *(A suivre.)*

RÈGLE MNÉMONIQUE

pour établir la Théorie des signes en Trigonométrie,

par Georges Dostor.

---

1. — Dans l'étude de la Trigonométrie, l'esprit des commençants est long à se familiariser avec la *théorie des signes*; celle-ci laisse toujours plus ou moins de confusion, même dans l'intelligence des élèves exercés. Il en résulte que les jeunes gens, qui n'ont pas la figure présente à l'imagination, ont de la peine à se rappeler immédiatement les signes que prennent les lignes trigonométriques d'un arc, lorsque cet arc subit des variations multiples du quadrant.

La règle suivante, que nous avons imaginée pour notre usage personnel, peut servir à faciliter l'étude de cette théorie; elle soulage la mémoire et fixe dans l'esprit, d'une manière nette et précise, tous les changements de signe que peuvent éprouver les lignes trigonométriques. Elle a déjà reçu en partie la sanction de l'expérience, puisqu'elle

se trouve enseignée par les professeurs auxquels elle a été soumise, et par ceux de nos élèves qui sont devenus nos confrères dans l'instruction publique.

2. — Définitions. Nous disposerons les lignes trigonométriques dans l'ordre habituel de leur définition. Ainsi nous écrirons d'abord le sinus, puis la tangente et enfin la sécante; à la suite nous placerons les lignes de l'arc complémentaire dans le même ordre, c'est-à-dire nous mettrons d'abord le cosinus, puis la cotangente et enfin la cosécante.

Les lignes trigonométriques étant disposées dans cet ordre, nous appellerons :

Lignes extrêmes, celles qui sont placées aux extrémités du tableau, c'est-à-dire le *sinus* et la *cosécante ;*

Lignes moyennes, celles qui sont situées au milieu du tableau, c'est-à-dire la *sécante* et le *cosinus ;*

Lignes intermédiaires, celles qui se trouvent entre les lignes extrêmes et les lignes moyennes, c'est-à-dire la *tangente* et la *cotangente.*

Nous nommerons *axe des sinus* le diamètre qui passe par l'origine des arcs directs, et *axe des cosinus* le diamètre mené par l'origine des arcs complémentaires.

Ces dénominations nous permettront de formuler les principes des signes trigonométriques comme suit.

3. — Signes des lignes trigonométriques dans les quatre quadrants.

Théorème I. — *Lorsqu'un arc est terminé sur le premier quadrant, toutes ses lignes trigonométriques sont positives.*

Théorème II. — *Lorsqu'un arc se termine sur le deuxième quadrant, ses lignes trigonométriques sont négatives, à l'exception des lignes extrêmes* (sinus et cosécante), *qui sont positives.*

Théorème III. — *Lorsqu'un arc finit sur le troisième quadrant, ses lignes trigonométriques sont négatives, excepté les lignes intermédiaires* (tangente et cotangente), *qui sont positives.*

Théorème IV. — *Lorsqu'un arc se termine sur le quatrième quadrant, ses lignes trigonométriques sont négatives,*

hormis les lignes moyennes (sécante et cosinus), *qui sont positives.*

Remarque. —Les signes qui affectent les lignes trigonométriques d'arcs terminés dans les quatre quadrants peuvent être consignés dans un tableau tel que le suivant :

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.	QUADRANTS			
	I	II	III	IV
Sinus	+	+	—	—
Tangente	+	—	+	—
Sécante	+	—	—	+
Cosinus	+	—	—	+
Cotangente	+	—	+	—
Cosécante	+	+	—	—

Si l'on tire trois droites continues entre les signes +, on voit que ces signes sont placés sur les côtés d'un triangle isoscèle, dont la base est dirigée dans la colonne du premier quadrant.

Il est aisé de prévoir que *les lignes de même nom ont toujours le même signe.*

En effet, on sait que le *rayon* du cercle sur lequel se trouvent comptés les arcs *est moyen proportionnel :*

1° Entre le sinus et la cosécante;

2° Entre la tangente et la cotangente;

3° Entre la sécante et le cosinus;

C'est-à-dire que

$$r^2 = \sin x \,.\, \text{coséc}\, x = \text{tang}\, x \,.\, \cot x = \text{séc}\, x \,.\, \cos x\,.$$

Or un carré est toujours positif : donc les lignes extrêmes ont toujours même signe, ainsi que les lignes intermédiaires et les lignes moyennes.

4. — *Comparaison des lignes trigonométriques qui correspondent à des arcs dont la somme ou la différence est un multiple de* π.

L'inspection du tableau des signes conduit immédiatement aux théorèmes suivants, qu'il suffit d'énoncer ici :

Théorème I. — *Lorsque la différence de deux arcs est égale à nombre pair de demi-circonférences*, ces deux arcs sont nécessairement terminés au même point, et, par suite, *toutes leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de même signe.*

Corollaire. — *Lorsque deux arcs diffèrent entre eux d'une circonférence, toutes leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de même signe.*

Théorème II. — *Lorsque la différence de deux arcs est égale à un nombre impair de demi-circonférences*, ces deux arcs sont nécessairement terminés aux extrémités d'un même diamètre et, par suite, *leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, à l'exception des lignes intermédiaires* (tangente et cotangente), *qui sont égales et de même signe.*

Corollaire. — *Lorsque deux arcs diffèrent entre eux d'une demi-circonférence, leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, à l'exception des lignes intermédiaires* (tangente et cotangente), *qui sont égales et de même signe.*

Théorème III. — *Lorsque la somme de deux arcs est égale à un nombre pair de demi-circonférences*, ces deux arcs sont nécessairement terminés aux extrémités d'une corde parallèle à l'axe des cosinus, et, par suite, *leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, à l'exception des lignes moyennes* (sécante et cosinus), *qui sont égales et de même signe.*

Corollaire I. — *Lorsque la somme de deux arcs est égale à une circonférence, leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, excepté les lignes moyennes* (sécante et cosinus), *qui sont égales et de même signe.*

Corollaire II. — *Lorsque deux arcs sont égaux et de signes contraires, leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, hormis les lignes moyennes* (sécante et cosinus), *qui sont égales et de même signe.*

Théorème IV. — *Lorsque la somme de deux arcs est égale à un nombre impair de demi-circonférences,* ces deux arcs sont terminés aux extrémités d'une corde parallèle à l'axe des sinus, et, par suite, *leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, à l'exception des lignes extrêmes* (sinus et cosécante), *qui sont égales et de même signe.*

Corollaire. — *Lorsque deux arcs sont supplémentaires, leurs lignes trigonométriques sont égales deux à deux et de signes contraires, à l'exception des lignes extrêmes* (sinus et cosécante), *qui sont égales et de même signe.*

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.

FACULTÉ DE PARIS.

Session de Novembre 1877.

1. Un plan est donné par ses traces qui font le même angle avec la ligne de terre. — Calculer la tangente de l'angle que fait la ligne de terre avec le plan donné.

2. On partage l'angle de 60° en deux parties telles que la tangente de l'une soit le double de la tangente de l'autre. — Déterminer la tangente de chacune des parties.

3. Dans une circonférence de rayon R on mène deux rayons OA, OB faisant un angle de 60°. — Exprimer au moyen de R le rayon de la circonférence intérieure au secteur AOB qui est tangente aux deux droites OA, OB et à l'arc AB.

4. La figure ACB est une demi-circonférence de rayon R, OC le rayon perpendiculaire au diamètre AB. — Déterminer la distance OD de façon que l'aire du triangle EIF soit la moitié de l'aire du triangle AIB.

5. Étant donné un trapèze ABCD, dont les bases AB, CD sont égales respectivement à a et b, trouver sur la base AB un point M tel que si l'on fait tourner le trapèze autour de AB, le volume engendré par le triangle ACM soit équivalent au volume engendré par le trapèze BMCD.

6. Étant donnés deux triangles ABC, A'B'C, dont les bases BC $= a$, B'C' $= a'$ reposent sur la même droite DE et dont les hauteurs sont h et h', à quelle distance de BC faut-il mener une droite MNM'N' parallèle à DE pour que, si l'on fait tourner la figure autour de cette droite DE, les volumes engendrés par les deux trapèzes BCMN, B'C'M'N' soient équivalents?

7. On donne une circonférence de diamètre AB. On mène un diamètre CD perpendiculaire à AB. A quelle distance du centre faudrait-il mener une droite EF parallèle à AB pour que le volume engendré par le trapèze AEFO fût égal à celui de la sphère qui aurait OE pour rayon?

8. A quelle distance du diamètre AB d'une circonférence faut-il mener une corde DC parallèle à ce diamètre, pour que, en joignant les extrémités de cette corde à un point P pris sur le diamètre AB, à une distance du centre OP $= a$, le produit PC PD ait une valeur donnée m^2?

9. Par l'extrémité du diamètre AB d'une circonférence on mène une tangente BP. On propose de mener une sécante AC telle que la partie extérieure soit égale à AB. On calculera la longueur AC de la corde.

10. Étant donnée une sphère de rayon R, à quelle distance du centre faut-il mener un plan DE parallèle à un plan passant par le diamètre de la sphère pour que le volume du segment DFE soit égal à celui du cylindre DD'EE'?

11. Étant donnée une sphère de rayon R, à quelle distance du centre faut-il mener un plan AB pour que la surface de la calotte ACB augmentée du cercle de base AB soit à la surface latérale du cylindre qui a pour base ce cercle et même hauteur CD que la calotte, dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1?

12. AB est le diamètre d'une sphère; mener perpendiculairement à ce diamètre deux plans tels que la surface de la sphère soit partagée en trois zones dont les surfaces soient entre elles comme trois lignes données m, n, p.

Déterminer par une construction géométrique les deux points du diamètre AB par où doivent passer les deux plans perpendiculaires.

13. Dans un cercle de rayon R, on mène deux diamètres rectangulaires AB, CD. Par A, on mène une tangente AE qu'on prolonge jusqu'à son intersection E avec la sécante BC. Entre les droites AE, EC et l'arc AC une certaine figure est comprise. On suppose que cette figure fait une révolution complète autour de AB. — Chercher l'expression du volume ainsi engendré.

FACULTÉ DE BORDEAUX.

Session d'août 1877.

1. On fait tourner un triangle équilatéral autour d'un axe Ax passant par un de ses sommets, situé dans son plan et extérieur au triangle; le côté AB fait avec l'axe un angle u. — Déterminer la valeur que doit avoir u pour que le volume soit maximum, et donner pour ce cas la valeur numérique du volume engendré en admettant AB $= 5^m$.

Réponse : $u = 60°$; $V = 196^{mc}, 35$.

2. Résoudre l'équation $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$.

Réponse : $x = n\pi$. $x = n\pi - \frac{\pi}{4}$.

3. Sur le prolongement d'un rayon OA $=$ R d'une circonférence, on prend un point S, par lequel on mène une tangente SB à la circonférence, et on fait tourner toute la figure autour de OS. — Déterminer le point S de manière que la surface latérale du cône engendré par SB soit égale au double de la surface de la calotte engendrée par l'arc AB. (Vérification de la solution.)

Réponse : En prenant pour inconnue la projection de OB sur l'axe, on a $x = \frac{R}{3}$.

4. Trouver l'angle de deux droites dont la première perce le plan vertical au-dessus et le plan horizontal derrière la ligne de terre, et dont la deuxième

perce le plan vertical au-dessus et le plan horizontal en avant de la ligne de terre.

5. Connaissant le périmètre $2p$ et la surface m^2 d'un triangle rectangle, trouver les trois côtés. — Discussion. — Application : $p = 10$, $m = 3$.

6. Résoudre
$$\sin(x - y) = \frac{1}{2}$$
$$\cos(x + y) = \frac{1}{2}$$

Réponse. — 4 solutions.

$$1 \left| \begin{array}{l} x = n\pi + \frac{\pi}{4} \\ y = n\pi + \frac{\pi}{12} \end{array} \right. \qquad 2 \left| \begin{array}{l} x = n\pi - \frac{\pi}{12} \\ y = n\pi - \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

$$3 \left| \begin{array}{l} x = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ y = n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \qquad 4 \left| \begin{array}{l} x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ y = n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \end{array} \right.$$

7. D'un point A mener à une circonférence donnée O une sécante telle que la portion extérieure AB soit égale à la portion intérieure BC. — Discussion des conditions de possibilité du problème.

8. On verse chaque trimestre chez un banquier une somme de 100 fr., dont les intérêts à 5 o/o par an doivent se capitaliser tous les trois mois. Quelle somme devra le banquier dix ans après le premier versement, c'est-à-dire 3 mois après le 40e et dernier versement?

A partir de cette époque, quelle somme le banquier devra-t-il payer chaque semestre pour que sa dette soit amortie après 60 nouvelles années, les intérêts à 5 o/o se capitalisant dans ce cas tous les 6 mois?

Réponse : $A = 5213$ fr. 32
$a = 137$ fr. 43

9. Trouver le minimum de la surface engendrée par les deux côtés AB, AC d'un triangle isoscèle BAC, de surface constante a^2, tournant autour de sa base BC.

10. Résoudre les équations
$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{4}{5}$$
$$\cos(x - y = 0,1$$

Réponse
$$1 \left| \begin{array}{l} x = n \,.\, 180^\circ + 49^\circ\ 8'\ 0'',34 \\ y = n \,.\, 180^\circ - 35^\circ\ 7'\ 38'',64 \end{array} \right.$$
$$2 \left| \begin{array}{l} x = n\ 180 - 49^\circ\ 8'\ 0'',34 \\ y = n \,.\, 180 + 35^\circ\ 7'\ 38'',64 \end{array} \right.$$

Session de novembre 1877.

1. Une pyramide régulière de base pentagonale a $5l$ pour périmètre de la base, et l'angle au sommet d'une face est α.

Calculer l'inclinaison d'une arête sur le plan de la base et l'angle de deux arêtes séparées l'une de l'autre par une arête intermédiaire.

2. Calculer le montant du capital qui, placé pendant 10 mois et 14 jours à 4 3/4 o/o par an, rapporterait 280 fr. — Rép. : 6,758 fr. 30 par excès.

FACULTÉ DE LILLE 1877.

Dans une ellipse, on connaît le grand axe et la distance focale. — Trouver les deux rayons vecteurs d'un point M de la courbe, d'où la distance focale serait vue sous un angle donné α. — Maximum de cet angle.

CONCOURS GÉNÉRAUX.

Nous avons pu nous procurer les énoncés des questions de concours généraux proposées depuis 1854, et nous croyons être utiles à nos lecteurs en commençant la publication de cette intéressante collection. Nous prions nos correspondants qui pourraient nous envoyer des questions de concours général ou de concours académiques de vouloir bien nous les communiquer, afin de nous permettre de réunir dans notre Journal, dans l'intérêt de tous, une série de questions si importantes au point de vue de l'enseignement des mathématiques en France.

CONCOURS DE 1854.

Classe de troisième (sciences).

Étant donné un triangle quelconque ABC, on diminue le côté AC d'une quantité arbitraire AA', et l'on augmente le côté BC d'une quantité égale BB'. — Démontrer que la nouvelle base A'B' sera coupée par l'ancienne dans le rapport inverse des côtés primitifs AC et BC.

Calculer, à moins d'un millimètre près et sans le secours des logarithmes, la circonférence qui a pour rayon la diagonale d'un carré de 5 décimètres de côté, et faire voir que l'on a obtenu l'approximation demandée.

Classe de seconde (sciences).

Inscrire dans une sphère donnée un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique qui se termine au même cercle.

Calculer les côtés d'un triangle dont le périmètre a $1^m,20$ et dont deux angles ont respectivement pour valeur :

Le 1er, $35°\ 17'\ 15''$
Le 2me, $62°\ 43.\ 30'$

Classe de Logique (lettres).

Prouver que si l'on fait tourner alternativement un parallélogramme autour de deux côtés non parallèles, les volumes des solides ainsi obtenus sont dans le rapport inverse des côtés.

Calculer le côté d'un losange, sachant que ce côté est égal à sa plus petite diagonale et que sa surface est équivalente à celle d'un cercle ayant 10^m de rayon.

Classe de Logique (sciences).

Dans un tétraèdre, on peut considérer pour chaque arête : 1° l'angle dièdre des deux faces qui se coupent suivant cette arête ; 2° les inclinaisons de cette même arête sur chacune des deux autres faces auxquelles elle se termine ; ce qui, pour les six arêtes considérées simultanément, donne en tout dix-huit angles.

On propose de démontrer que la somme de ces dix-huit angles est constante et égale à douze angles droits dans tout tétraèdre où les arêtes opposées sont perpendiculaires entre elles, c'est-à-dire dans tout tétraèdre où les angles qu'on formerait, en considérant les trois couples d'arêtes qui ne se rencontrent pas, et menant par un point quelconque de l'espace des parallèles aux arêtes de chaque couple, seraient trois angles droits.

Dans tout tétraèdre, quand, sur les six arêtes, il y en a deux qui sont respectivement perpendiculaires aux deux arêtes qui leur sont opposées, on propose de démontrer que les deux arêtes restantes sont aussi perpendiculaires l'une sur l'autre

---

CONCOURS DE 1855.

Classe de troisième (sciences).

Deux cercles dont les rayons ont respectivement $0^m,5$ et $1^m,2$ de longueur se coupent de telle façon que les tangentes menées par l'un des points d'intersection sont perpendiculaires entre elles : on demande la distance des centres.

Calculer la surface d'un cercle, sachant qu'une corde de $0^m,4$ de longueur y sous-tend un arc de 120 degrés.

Classe de seconde (sciences).

Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets.

Déduire de là le volume du secteur sphérique et par suite de la sphère.

Par l'une des arêtes d'un tétraèdre donné mener un plan qui divise l'arête opposée en deux parties proportionnelles aux aires des faces dont l'arête commune est celle par laquelle on doit mener le plan.

Quelle est la droite qui, partant du sommet du tétraèdre, rencontre la base en un point tel qu'en le considérant comme sommet commun de trois angles ayant pour bases les trois côtés de cette base, les aires de ces triangles soient proportionnelles aux aires des faces correspondantes du tétraèdre ?

Classe de rhétorique (sciences).

Étant donnée une parabole, démontrer que, si l'on joint deux points m m' de la courbe, et qu'on prolonge la corde mm' jusqu'à la rencontre de la directrice, la ligne qui joint le point de rencontre au foyer partagera en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

Classe de logique (lettres).

Exposer les diverses propositions au moyen desquelles on démontre quelle est la mesure de l'aire d'un parallélogramme quelconque.

Démontrer que si, sur les trois côtés d'un triangle considérés comme diamètres, on décrit trois circonférences, celles-ci se rencontreront deux à deux sur les côtés mêmes du triangle prolongés s'il le faut : discussion.

On a deux paiements à effectuer, l'un de 10,000 francs au bout de quatre ans six mois, l'autre de 30000 francs au bout de cinq ans huit mois; on voudrait s'acquitter en une fois, au moyen d'un paiement de 40,000 francs. — On demande à quelle époque il devra s'effectuer; l'intérêt est simple et le taux 4,5 o/o.

Classe de logique (sciences).

Expliquer la théorie de l'extraction de la racine carrée, sur le nombre 755,161.

Extraction de la racine carrée du nombre décimal 0,78614 avec une erreur moindre que 0,01.

Construire un triangle dans lequel on connaît l'angle au sommet, la médiane et la hauteur qui correspondent à ce sommet.

Dans un quadrilatère dont deux angles opposés sont droits, étant donnés les deux côtés qui comprennent l'un des deux autres angles, ainsi que cet angle, trouver les deux autres et les deux diagonales du quadrilatère.

CONCOURS DE 1856.

Classe de troisième (sciences).

Extraire la racine carrée de 19 à 0,01 près. Donner sur cet exemple la théorie de l'opération.

On donne un quadrilatère ABCD inscrit dans une circonférence de cercle; deux côtés contigus, AB et AC, sont égaux; on tire les diagonales AD et BC, qui se coupent en un point I. — On demande de démontrer que chacun des côtés AB, AC est moyen proportionnel entre AD et AI.

Classe de seconde (sciences).

Volume de la pyramide tronquée. Volume du tronc de cône.

Un tronc de cône a pour hauteur le diamètre d'une sphère donnée; le rayon de sa base inférieure est égal au rayon de la sphère : on demande de calculer le rayon de sa base supérieure, connaissant le rapport de son volume à celui de la sphère.

Classe de rhétorique (sciences).

Étant donnés sur une même droite les sommets et les foyers de deux paraboles, construire les points communs à ces deux courbes.

Classe de logique (lettres).

Expliquer les règles de la division des fractions et de la division des nombres décimaux.

Circonscrire à un cercle donné un losange tel que les surfaces du losange et du cercle soient entre elles comme deux lignes données.

Classe de logique (sciences).

On donne une circonférence O, dans laquelle on trace un diamètre AB; on trace deux tangentes aux points A et B : on demande de mener une tangente CD telle que le volume engendré par le trapèze ABCD soit égal au volume d'une sphère donnée.

Exposer la méthode à suivre dans les questions de maximum ou de minimum qui se rapportent aux équations du 2e degré. — Appliquer les principes au problème suivant :

De tous les triangles rectangles dont la somme des côtés est constante, quel est celui dans lequel la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est maximum.

CONCOURS ACADÉMIQUE D'AIX (1869)

Trouver sur le prolongement de la corde AB d'une circonférence un point tel qu'en menant de ce point une tangente à la circonférence, le produit des distances des points A et B à cette tangente soit égal à un carré donné m^2.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE BORDEAUX (1874)

On donne la longueur des quatre côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère inscriptible au cercle.

Si E et F sont les points de rencontre des côtés opposés AB et DC, BC et AD, on demande de calculer les distances de ces deux points aux quatre sommets du quadrilatère et leur distance mutuelle EF.

Étant donnés la base ABC d'un tétraèdre et le rapport $a : b : c$ des trois arêtes au sommet DA, DB, DC, déterminer le lieu géométrique du point D. — Indiquer la construction par la géométrie descriptive.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE DOUAI (1874).

Une courbe en forme d'anse de panier ABA', symétrique par rapport à sa flèche OB et normale en A et en A' à sa corde AA', est formée de trois arcs de cercles AM, MM', M'A'. Ces arcs ont respectivement leurs centres en C, I et C' et l'on a CA = C'A' = r' et BI = r comme rayons respectifs.

Étant données la demi-corde OA = a et la flèche OB = b, on demande :

1° D'évaluer r en fonction de r' et r' en fonction de r;

2° De calculer r et r' dans le cas particulier où les trois arcs AM, MM' et M'A' soient de 60° chacun;

3° De calculer r et r' quand l'arc MM' vaut à lui seul autant de degrés que les deux autres AM, A'M' ensemble;

4° De calculer r et r' quand l'angle BIM = BAO et que, par suite, l'angle MCA = OBA.

Dans ce dernier cas, construire avec la règle et le compas les deux rayons r et r' (étant données toujours les droites OA et OB).

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le **docteur Henri Suter** de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon

(*Suite*. Voir page 346.)

Les historiens de l'antiquité attribuent aux Égyptiens un *système du monde* remarquable, d'après lequel les planètes Mercure et Vénus se mouvaient autour du soleil. D'autres assurent même qu'ils avaient attribué à toutes les planètes un mouvement de translation autour du soleil qui devenait le centre commun de leurs mouvements. Toutefois ils n'expriment à ce sujet que de simples conjectures. — Il est assez vraisemblable que les noms des planètes et les désignations des jours de la semaine sont d'origine égyptienne.

Nous trouvons chez les Chaldéens, les Indous et les autres

peuples anciens les mêmes désignations mythologiques des planètes, ainsi que la même division de la semaine en sept jours. Tous les autres peuples, y compris les Germains, ont ensuite, à leur tour donné aux jours de la semaine les noms de leurs divinités correspondantes. Ainsi Donnerstag (jeudi) vient de Thor, dieu du tonnerre; Freitag (vendredi), vient de Freya, la Vénus des Germains.

La division du zodiaque en douze parties ou constellations et la dénomination de celles-ci furent semblables chez presque tous les peuples de l'antiquité. Ces opérations subirent l'influence de considérations religieuses et mythologiques. — Nous sommes autorisés à considérer, avec La Place, la division de la semaine et celle du zodiaque comme les monuments les plus anciens de l'astronomie dans l'antiquité.

La chronométrie des Égyptiens était très-renommée et eut cours depuis les temps les plus anciens jusqu'à Auguste. Le caractère qui la fait différer de presque toutes les chronométries des autres peuples civilisés consiste en ce que les Égyptiens portaient la valeur de l'année au nombre entier de 365 jours. En négligeant ainsi les 6 heures supplémentaires, ils faisaient parcourir toutes les saisons au commencement de leur année. Cette manière de compter répondait à leurs coutumes religieuses, aux fêtes et aux sacrifices qui ne devaient jamais tomber aux mêmes époques.

La période de temps après laquelle le commencement de l'année revenait au même jour s'élevait à 1,460 ans, et elle fut nommée la période de *Sothis* (ou période caniculaire), du mot Sothis, qui était le nom que les Égyptiens donnaient à Sirius : ce peuple, en effet, réglait son calcul non pas sur la marche du soleil, mais sur celle de Sirius, parce que l'apparition de cette étoile radieuse coïncidait avec l'inondation de leur fleuve sacré.

Divers écrivains de l'antiquité ont établi que le renouvellement de la période de Sothis avait eu lieu sous le gouvernement d'Antonin le Pieux, c'est-à-dire environ 138 ans après J.-C. Ensuite d'autres savants ont essayé de faire commencer cette période égyptienne à l'année 1323

avant J.-C; et ils ont fourni un point d'appui plus sûr aux dates de l'histoire égyptienne.

Il nous reste encore à jeter un rapide coup d'œil sur l'astronomie de deux peuples qui n'ont pas, il est vrai, contribué au développement de la science comme ceux dont nous venons de parler, et par suite sont un peu mis à l'écart : toutefois ils méritent une place dans l'histoire.

Les Chinois et les Indiens se glorifient, comme les Chaldéens et les Égyptiens, d'anciennes observations astronomiques.

Les annales chinoises parlent d'une conjonction de cinq planètes qui aurait été observée l'an 2500 avant J.-C. Et il est vrai, d'après Montucla, d'après l'astronome Kirch, de Berlin, et le chronologiste français Des Vignoles, qu'un pareil phénomène aurait été observé pendant l'année 2449 avant J.-C. De même, sous l'empereur Tschong-Kang, l'an 2155 avant J.-C., on aurait observé une éclipse de soleil. On parle aussi des lois sévères qui existaient en Chine à ce sujet. Ainsi les astronomes qui s'occupaient de prédire une éclipse étaient condamnés à mort. Quelle que soit l'ancienneté des connaissances astronomiques des Chinois même en dehors des études relatives aux éclipses, il est bien probable qu'elles n'ont pas dépassé les notions élémentaires : le caractère apathique de ce peuple justifie cette opinion.

S'écartant en cela des autres peuples de l'antiquité, les Chinois partagent, comme autrefois les Arabes avant Mahomet, le zodiaque en 28 constellations. En outre, ils ne calculent pas comme nous par siècles, mais par périodes de 10 ans. Leurs années sont luni-solaires avec des mois dont la durée est de 30 et 29 jours alternativement.

La longueur de l'année est pour eux de 365 jours 6 heures, et ils connaissent le cycle de 19 ans équivalent à 235 révolutions de la lune. Sous les successeurs de *Dschengischan*, ainsi que nous verrons plus tard ce fait se produire en Perse, l'astronomie était en Chine dans tout son épanouissement; les astronomes de cette époque prenaient pour la longueur de l'année 365 jours 5 heures 49 minutes

12 secondes; cette évaluation était d'une exactitude remarquable. Mais la chute rapide de cette maison princière fit bientôt retomber la science dans ses anciennes limites, et actuellement la Chine n'a pas fait avancer ses connaissances au delà de celles qui avaient cours au XIIe siècle. Ce peuple se caractérise par la ténacité de sa force vitale, qui est des plus remarquables, et par la lenteur étonnante de son développement intellectuel : c'est peut-être là une des causes de sa longue existence. Combien de nations et d'empires ce peuple a vus disparaître du théâtre de l'histoire!

En ce qui concerne l'état de l'astronomie chez les Indiens, nos connaissances sont excessivement défectueuses. Le célèbre savant français Cassini a publié, à ce sujet, un long traité dans les Mémoires de l'Académie de France, en 1699. Il nous apprend que les Indiens avaient deux divisions du zodiaque : l'une, correspondante à la course de la lune, comprenait 27 parties; l'autre, basée sur la marche du soleil, comprenait 12 parties. Les noms des différentes constellations ont une grande analogie avec ceux des Chaldéens, des Égyptiens et des Grecs, ce qui n'a pas lieu chez les Chinois. Cassini rapporte ensuite que les Indiens distinguaient l'année sidérale et l'année tropique ; la première était de 365 jours 6 heures 12 minutes; la dernière, de 365 jours 5 heures 55 minutes. Cette évaluation se rapprochait beaucoup de celle d'Hipparque. Ils connaissaient aussi le cycle de 19 années solaires équivalant à 235 mois lunaires. Leur nouvelle chronologie astronomique doit dater de l'an 638 après J.-C.; et il est ainsi fort vraisemblable que la science atteignit son apogée chez ce peuple à l'époque où les Arabes étendirent leur domination sur l'Asie Mineure et la Perse, jusqu'aux limites de l'Inde. Malheureusement la science indienne était le domaine de la caste ecclésiastique des brahmes, dont lecerc le était impénétrable : par là il devient fort difficile de jeter un coup d'œil sur le développement historique de ce peuple. Cependant trois savants anglais, MM. Colebrooke, Taylor, Strachey, qu'on ne saurait assez remercier, sont parvenus après

de grands efforts et par la traduction de quelques mathématiciens indiens, à pouvoir soulever un coin du voile qui nous cache cette science mystique. — Nous reviendrons sur ces découvertes intéressantes lorsque nous passerons en revue les mathématiques arabes.

Voilà, en somme, ce que l'on peut savoir sur les connaissances mathématiques des anciens temps. Elles ne s'élèvent guère au-dessus de la simple étude du monde physique. On ne peut s'en étonner lorsqu'on sait qu'il était défendu aux Grecs de soumettre à la spéculation philosophique les lois des phénomènes physiques. Par suite, dans le chaos confus des phénomènes que la nature déroulait sous leurs yeux, ils ne pouvaient établir aucune division, aucune classification ; ils ne pouvaient séparer l'abstrait du concret. Ils ne pouvaient donc constituer en une science méthodiquement coordonnée l'arithmétique, la géométrie, la physique ou l'astronomie. *(A suivre.)*

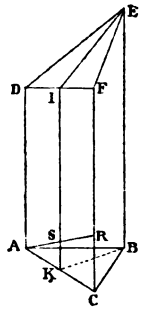
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 4.

Solution par M. Canon, élève à l'Athénée royal de Liége.

Étant donné un tronc de prisme droit, on demande de mener par l'une des arêtes un plan qui le partage en deux parties proportionnelles à des nombres donnés.

(Éc. Forest. 1869.)



Supposons le problème résolu et soit le plan EIKB qui divise en deux parties comme m est à n le prisme tronqué ABCDFE. Toute la question revient à déterminer l'arête IK $= x$.

Nous avons

$$\frac{\text{AKBDIE}}{\text{KCBIFE}} = \frac{m}{n}$$

ou $$\frac{\text{AKBDIE}}{\text{ABCDEF}} = \frac{m}{m+n}$$

donc $$\frac{\text{AKB (AD + EB + IK)}}{\text{ABC (AD + CF + BE)}} = \frac{m}{m+n}$$

Représentant les arêtes respectivement par a, b, c et remarquant que $\frac{\text{AKB}}{\text{ABC}} = \frac{\text{AK}}{\text{AC}}$,

nous aurons $$\frac{\text{AK}\,(a+b+x)}{\text{AC}\,(a+b+c)} = \frac{m}{m+n} \quad (1).$$

Dans la face ACDF menons AR parallèle à DF, il viendra

$$\frac{\text{AK}}{\text{AC}} = \frac{\text{AS}}{\text{AR}} = \frac{\text{KI} - \text{AD}}{\text{FC} - \text{AD}} = \frac{x-a}{c-a},$$

Remplaçant la valeur de ce rapport dans (1), il viendra

$$\frac{(x-a)\,(a+b+x)}{(c-a)\,(a+b+c)} = \frac{m}{m+n}$$

d'où $$x = -b \pm \sqrt{\frac{m(b+2c)^2 + n\,(b+2a)^2}{m+n}},$$

donc $$x' = -b + \sqrt{\frac{m(b+2c)^2 + n(b+2a)^2}{m+n}}$$

$$x'' = -b - \sqrt{\frac{m(b+2c)^2 + n(b+2a)^2}{m+n}}.$$

Examinons séparément ces deux valeurs.

x' est positif, car il est évident que le radical est plus grand que b; mais on doit avoir égard à la grandeur des arêtes DA $= a$, FC $= c$ de la face du prisme, dans laquelle x doit être compris.

Si la valeur de x est comprise entre a, et c l'arête KI est comprise entre DA et FC. Si $x < a$, le volume du prisme sera divisé en segments soustractifs. Il en sera de même si $x > a$.

Considérons maintenant la seconde valeur x''. On peut dire que cette valeur est inadmissible, car si l'on remarque que la valeur de x diminue à mesure que KI se rapproche du point de concours des arêtes DA, AC, on est porté à croire qu'au delà du point P, elles seraient négatives. On n'a

plus, à proprement parler, de tronc de prisme ; il faudrait considérer un volume différent.

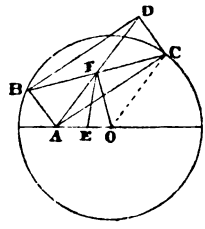
Donc la solution *positive* est *seule* admissible pour la question considérée.

Nota. La même question a été résolue par M. Vautré, de Saint-Dié.

QUESTION 49.

Solution par M. G. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

On fait tourner un angle droit autour de son sommet A *fixe dans l'intérieur d'un cercle. Les côtés rencontrent la circonférence en* B *et* C. *On construit le rectangle ayant pour côtés* AB, AC. *Trouver le lieu du quatrième sommet* D.



Soit D un point du lieu; menons les diagonales du rectangle et joignons leur point d'intersection au centre O du cercle et au milieu E de la droite AO. D'après le théorème de la médiane, on a :

$$AF^2 + FO^2 = 2FE^2 + 2EO^2;$$

mais $$FA = FC;$$

donc $$FC^2 + FO^2 = OC^2 = 2FE^2 + 2EO^2;$$

ou $$2FE^2 = OC^2 - 2EC^2,$$

d'où $$FE = \sqrt{\frac{OC^2}{2} - EO^2}.$$

La droite EF est donc constante; par suite OD qui est égale à 2EF, est aussi constante.

Le lieu est donc une circonférence concentrique à la première et de rayon

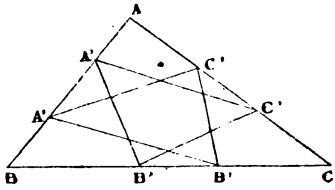
$$OD = 2\sqrt{\frac{\overline{OC}^2}{2} - \overline{EO}^2}.$$

Nota. Ont résolu la même question : MM. Biette, du Havre; Belin, de Semur; Lauriol, d'Avignon; Nettre, de Nancy; Hugentobler, de Boppelsen (Suisse); Perrin, de Clermont; Haye, École normale de Chartres.

QUESTION 50.

Solution par M. Demortain, élève à l'École communale de Doullens.

Étant donné un triangle ABC, *si l'on prend sur ses côtés trois points quelconques* A′, B′, C′, *et les symétriques* A″, B″, C″ *de ces points par rapport aux milieux des côtés du triangle, les deux triangles* A′B′C′, A″B″C″ *sont équivalents.*



Soient CB $= a$, AC $= b$, AB $= c$, les côtés du triangle ABC et posons

$$AA' = BA'' = m,\ BB' = CB'' = n,\ CC' = AC'' = p.$$

Les triangles ABC, AA′C′ ayant un angle égal sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle;

donc $$\frac{AA'C'}{ABC} = \frac{m\,(b-p)}{bc} = \frac{abm - amp}{abc}.$$

On aurait de même

$$\frac{CB'C'}{ABC} = \frac{acp - cnp}{abc}$$

$$\frac{BB'A'}{ABC} = \frac{bcn - bmn}{abc},$$

Ajoutant ces trois égalités membre à membre, il viendra

$$(1)\quad \frac{ABC - A'B'C'}{ABC} = \frac{abm - amp + acp - cnp + bcn - bmn}{abc}$$

En faisant les mêmes raisonnements pour les triangles AA″C″, CC″B″, BA″B″, on trouverait

$$(2)\quad \frac{ABC - A''B''C''}{ABC} = \frac{acp - amp + abm - bmn + bcn - cpn}{abc}$$

Les seconds membres des égalités (1) et (2) étant égaux, les premiers le sont aussi, et

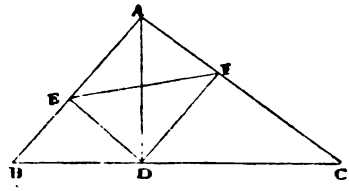
$$A'B'C' = A''B''C''.$$

Nota. Ont résolu la même question : MM. Nettre, de Nancy; Lauriol, d'Avignon; Loritz, de Nancy; Perrin, de Clermont.

QUESTION 51.

Solution par M. Lauriol, élève du Lycée d'Avignon.

Soit ABC *un triangle rectangle,* AD *la hauteur; mener par le pied* D *des droites* DE, DF *également inclinées sur cette hauteur, de façon que le triangle* EDF *soit maximum.*



Appelons x l'angle des droites DE, DF avec l'hypoténuse et S la surface du triangle DEF. On a

$$S = \frac{1}{2}\,DE.DF \sin 2x.$$

Or $$DE = \frac{BD \sin B}{\sin BED} = \frac{BD \sin B}{\sin (B + x)}$$

$$DF = \frac{DC \sin C}{\sin CFD} = \frac{DC \sin C}{\sin (C + x)} = \frac{DC \cos B}{\cos (B - x)}$$

donc $$S = \frac{1}{2}\,\frac{BD\,.\,DC\,.\,\text{Sin}\,B\,\text{Cos}\,B\,.\,\text{Sin}\,2x}{\sin (B + x) \cos (B - x)}.$$

Si nous remarquons que

$$BD.DC = AD^2,$$

et que $\sin (B + x) \cos (B - x) = \frac{1}{2}\left[\text{Sin}\,2B + \text{Sin}\,2x\right]$

nous aurons :

$$S = \frac{AD^2.\ \sin B\,.\,\cos B\,.\,\sin 2x}{\sin 2B + \sin 2x} = \frac{AD^2.\ \sin B\,.\,\cos B}{\dfrac{\sin 2B}{\sin 2x} + 1}$$

S sera maximum quand $\frac{\sin 2B}{\sin 2x}$ sera minimum, ou quand $\sin 2x$ sera maximum, et ce maximum a lieu pour $\sin 2x = 45^\circ$.

Pour cette valeur, la surface maximum est égale à

$$\frac{AB^2.\ \sin B\,.\,\cos B}{1 + \sin 2B}.$$

Remarque I. — On peut se demander quelle est la valeur de B pour laquelle AD et x étant constants le triangle serait maximum.

Reprenons la formule

$$S = \frac{\overline{AD}^2 . \sin B . \cos B . \sin 2x}{\sin 2B + \sin 2x},$$

ou, en remarquant que $\sin B \cos B = \frac{1}{2} \sin 2B$,

$$= \frac{\overline{AD}^2 . \sin 2x}{2 + \frac{\sin 2x}{\sin 2B}},$$

S sera maximum quand $\frac{\sin 2x}{\sin 2B}$ sera minimum, ou quand Sin 2B sera maximum, ce qui a lieu pour $B = 45°$; alors ABC est isoscèle.

Remarque II. — Si l'on suppose AD fixe et x et B variables, S est maximum quand $x = 45°$ et $B = 45°$.

M. Emile Dilhan, élève du collége de Saint-Gaudens, suppose un triangle quelconque et en tire, en appelant m et n les segments BD, DC déterminés par la hauteur h, et x l'angle ADF $\qquad \operatorname{tg}^2 x = \frac{mn}{h^2}$.

Si A est droit, $mn = h^2$, alors $x = 45°$.

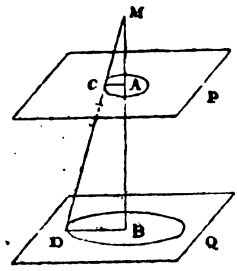
Si $m = n$, le triangle est isoscèle, $\operatorname{tg} x = \frac{m}{h}$ d'où $x = \frac{A}{2}$.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Aubert, du lycée de Marseille ; Belin, de Semur ; Biette, du Havre et Cordeau, de l'École Lavoisier.

QUESTION 52.

Solution par M. Aubert, élève du lycée de Marseille.

Étant donnés deux plans parallèles P *et* Q, *une perpendiculaire commune* AB *et un point* M *sur cette droite, trouver un cône de révolution ayant pour sommet le point* M, *pour axe la droite* MAB, *et tel que le volume intercepté dans le cône par les deux plans parallèles soit donné. — Discuter.*



Nous distinguons trois cas :

1° Le point M est situé du même côté des deux plans;

2° Le point M est sur l'un des plans;

3° Le point M est entre les deux plans;

Dans chacun de ces cas, nous désignerons par a et b les distances du point M à chacun des plans P et Q, par d la distance des deux plans et par $\frac{1}{3}\pi H^3$ le volume donné.

Dans le premier cas, on a

$$\frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 . b - \frac{1}{3}\pi \overline{AC}^2 a = \frac{1}{3}\pi K^3,$$

$$\text{ou } b . \overline{BC}^2 - a . \overline{AC}^2 = K^3.$$

Si l'on désigne par x l'angle que fait la génératrice du cône avec la perpendiculaire AB, on a

$$\operatorname{tg}^2 x(b^3 - a^3) = K^3,$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{K^3}{b^3 - a^3}}.$$

Dans le second cas, le volume devient un cône de hauteur d; et on a $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{K^3}{d^3}}$.

Enfin, dans le troisième cas,

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{K^3}{a^3 + b^3}}.$$

Discussion. — Faisons varier x et voyons les variations de K^3 dans les trois cas considérés.

1er cas :

Si $x = 0$ $K^3 = 0$

$x = 45°$ $K^3 = b^3 - a^3$

$x = 90°$ $K^3 = \infty$

Il n'y a donc ni maximum ni minimum.

2° cas :

Si $x = 0$ $K^3 = 0$

$x = 45°$ $K^3 = d^3$

$x = 90°$ $K^3 = \infty$

ni maximum ni minimum.

3° cas :

Si $x = 0$ $K^3 = 0$

$x = 45°$ $K^3 = a^3 + b^3$

$x = 90°$ $K^3 = \infty$

ni maximum ni minimum.

Soit maintenant $x = \alpha$, α étant une constante, et voyons les variations de K lorsqu'on fait parcourir à M la droite AB prolongée à l'infini.

L'équation générale du problème

$$\operatorname{tg}^2 x(b^3 - a^3) = K^3$$

devient $$\operatorname{tg}^2 \alpha(b^3 - a^3) = K^3$$

que l'on peut écrire

$$\operatorname{tg}^2\alpha(a^2 + b^2 + ab) = \frac{K^3}{b - a}$$

Si M est à l'infini par rapport aux deux plans

$$a^2 + b^2 + ab = \infty$$

et comme $b - a = d =$ constante,

on a nécessairement $K^3 = \infty$

Si M se rapproche de A, le volume diminue et au point A

$$d^3 \operatorname{tg}^2 \alpha = K^3$$

et il n'y a évidemment qu'une valeur.

Si M va de A en B, K^3 part de

$$d^3 \operatorname{tg}^2 \alpha = K^3$$

pour arriver à $d^3 \operatorname{tg}^2 \alpha = K^3$ quand M est en B; et comme

$$a^3 + b^3 < (a + b)^3$$

K^3 passe par un minimum.

Pour établir ce minimum prenons la formule du troisième cas $$(a^3 + b^3) \operatorname{tg}^2 x = K^3.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(a + b)^3 \operatorname{tg}^2 \alpha = K^3 - 3ab(a + b);$$

et comme $a + b = d$, on aura :

$$d^3 \operatorname{tg}^2 \alpha = K^3 - 3abd.$$

Le minimum de cette expression aura lieu quand ab sera maximum; or $a + b = d$; donc il y aura maximum pour $a = b = \frac{d}{2}$

C'est-à-dire quand M sera à égale distance des deux plans.

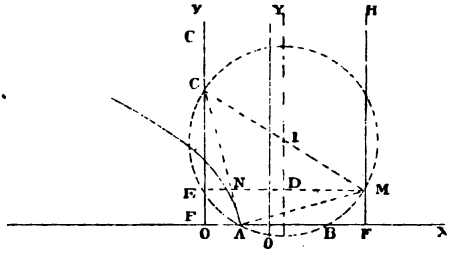
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Cordeau, élève à l'École Lavoisier, et Nettre, de Nancy.

QUESTION 54.

Solution par M. Boudin, soldat au 31e de ligne.

On donne deux droites rectangulaires OX, OY. *Sur* OX *on prend deux points fixes* A *et* B, *et sur* OY *on prend un point variable* C. *On fait passer une circonférence par ces trois points. Trouver géométriquement : 1° le lieu de l'extrémité* M *du diamètre qui passe par le point* C; *2° le lieu du point* N *de rencontre de* AC *avec une parallèle à* OX *menée par le point* M.

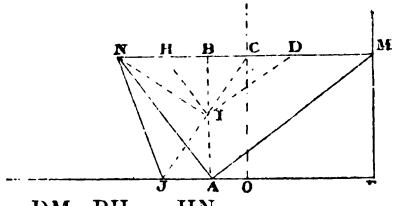
1° Le lieu des centres des circonférences qui passent par les points A, B, et C, C', est sur une perpendiculaire au milieu de AB (fig. 1). Par le point M, menons ME parallèle à OX. Puisque IC = IM, ED = DM, à cause de la parallèle ID à OY.



Comme ED est constant, il en est de même de DM. Donc le lieu du point M est une droite MH parallèle à OC, et symétrique de OY par rapport au milieu de AB.

2° L'angle CAM est droit puisque CM est un diamètre. Le lieu du point N est donc le même que celui des points d'intersection de la parallèle MN à OX, et de la perpendiculaire AN sur AM.

Du point A, j'élève la perpendiculaire AB sur AF (fig. 2); cette ligne rencontre MN en B. Par le milieu de AB, je mène ID parallèle à AM, et IH parallèle à AN. Les lignes ID et IH sont donc perpendiculaires entre elles, et, de plus, on a BD = DM, BH = HN.



Par le point O pris sur AF, au quart de AF, à partir du point A, j'élève une perpendiculaire sur AF ; cette perpendiculaire rencontre MN au point C, et si je mène la droite CI prolongée jusqu'à sa rencontre en J avec AF, on a, puisque AI est parallèle à OC, AO = AJ. Donc le point J est fixe.

De plus, on a $BD \times BH = BI^2$; et puisque $BN = 2BH$, et $BD = 2BC$, on aura

$$BN \times BC = BD \times BH.$$

Donc les lignes CI et IN sont perpendiculaires. Il en résulte que le triangle CNJ est isoscèle; donc JN = CN. Le lieu du point N est donc une parabole ayant pour foyer le point J, pour sommet A, et pour directrice OC.

QUESTION 68.

Solution par M. Cordeau, élève de l'École Lavoisier.

Dans tout cône la surface latérale s, la surface totale S *et le volume* V *sont liés par la relation*

$$9\pi V^2 = S\left[S - s\right]\left[2s - S\right].$$

Désignons par H la hauteur, R le rayon et A l'apothème du cône. On a

$$V = \frac{1}{3} \quad R^2H,\ S = \pi R\ (A + R)\ \pi S = \pi RA =$$

et $$H^2 = A^2 - R^2 = (A + R)\ (A - R).$$

De la première de ces relations on tire :

$$9\pi V^2 = \pi^3 R^4 H^2,$$

ou, en remplaçant H^2 par sa valeur,

(1) $$9\pi V^2 = \pi R(A + R)\ .\ \pi R^2\ .\ \pi R(A - R);$$

d'ailleurs $$\pi R\ (A + R) = S$$

$$\pi R^2 = S - s,$$

et $$\pi R(A - R) = \pi R\left[2A - (A + R)\right] = 2s - S$$

Substituant dans (1), on trouve :

$$9\pi V^2 = S \cdot (S - s)(2s - S).$$

Nota. — Ont résolu la même question MM. Chenet, élève mineur, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne; Thual, à Lorient; Westphalen, Biette, au Havre; Pyolle, à Constantine; Perrin, à Clermont; Demortain, à Doullens; Vitré, à Saint-Dié.

QUESTIONS PROPOSÉES

81. — Si SMPR est un demi-cercle dont le diamètre est SR et si les cordes SP, RM se coupent en un point N, on a la relation $SR^2 = SN \times SP + RN \times RM$

(The Educational Times.)

82. — Dans le tétraèdre ABCD, la face ABC est à angle droit sur les faces ABD et ACD. Si l'arête BC est aussi à angle droit sur l'arête DC, la face ADC est à angle droit sur la face BDC. *(The Educational Times.)*

83. — 1° La somme de deux nombres consécutifs de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$, n étant entier, est toujours un carré parfait

2° Le double d'un nombre de la forme $2n(n-1)$, augmenté de 1, donne le carré d'un nombre impair.

3° La somme de deux nombres consécutifs de la forme $2n(n-1)$ donne le carré d'un nombre pair.

4° Le produit de deux nombres de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ et $2n(n-1)$, augmenté du carré de n, donne la quatrième puissance de n. *(Brocot.)*

84. — La somme des n premiers nombres de la forme $1 + 3n(n-1)$ est égale au cube de n. *(Brocot.)*

85. — Tout nombre de la forme

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\left[1 + 2n(n-1)\right]$$

est une quatrième puissance. *(Brocot.)*

86. — Étant donné un triangle ABC, sur AB et sur AC comme diamètres, on décrit des circonférences; on mène dans la première un diamètre EF parallèle à AC, et dans la seconde un diamètre GH parallèle à AB. Démontrer que les points F, H sont sur la bissectrice de l'angle A du triangle, et que les points E, G sont sur la bissectrice extérieure de cet angle. *(Brocot.)*

87. — Sur une droite AB on décrit une demi-circonférence. De l'extrémité du rayon perpendiculaire à AB, comme centre, on décrit une circonférence passant par les points A et B. Une droite quelconque partant de A rencontre la première circonférence en D et la seconde en E. Démontrer que l'on a $AD^2 + DE^2 = AB^2$. *(Brocot.)*

88. — On donne deux cercles de rayons r et r' qui se coupent orthogonalement, puis l'on détermine un cercle qui touche les deux premiers et leur tangente commune. Démontrer que le diamètre x de ce cercle est donné par la relation

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}. \qquad \textit{(Julliard.)}$$

89. — Soit ABC un triangle rectangle en A; sur les trois côtés comme diamètre, on décrit des circonférences, et on mène les tangentes communes à ces circonférences considérées deux à deux. Si m est la longueur de la tangente commune aux cercles décrits sur les deux côtés de l'angle droit, n et p en longueurs des deux autres tangentes communes, démontrer la relation

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{m^2}{n^2p^2}. \qquad \textit{(Julliard.)}$$

90. — Soit ABC un triangle rectangle en A. Menons les trois cercles qui se touchent deux à deux et qui ont pour centres les sommets du triangle ABC; puis menons les tangentes communes à ces cercles considérés deux à deux. Si l désigne la longueur de la tangente opposée à l'angle A, m et n les deux autres, démontrer la relation.

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{l^2}{m^2n^2}. \qquad \textit{(Julliard.)}$$

91. — Soit un triangle quelconque ABC. On décrit les cercles ayant pour centres les sommets du triangle et se touchant deux à deux, puis on mène les tangentes communes à ces cercles pris deux à deux. Si l'on appelle l, m, n les longueurs de ces tangentes communes, $2p$ le périmètre des triangles, démontrer la relation

$$2p = lmn\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right).$$

(Julliard.)

92. — Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, la différence de leurs carrés ne peut être un carré parfait que si $a + b$ et $a - b$ sont eux-mêmes des carrés parfaits. *(Perrin.)*

93. — On donne un point A situé en dehors de la bande déterminée par deux parallèles. On demande la position que doit prendre la perpendiculaire commune pour être vue du point A sous un angle maximum. *(Saint-Cyr, 1872.)*

94. — On donne un secteur circulaire et l'on demande sur l'arc AB un point D tel qu'en menant des parallèles aux rayons, on forme un parallélogramme de périmètre donné. *(Thual.)*

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

Note de la rédaction.

L'accueil bienveillant qui a été fait à notre journal, nous montre qu'il répond à un besoin réel. Il nous impose le devoir de persister dans la voie que nous nous sommes tracée et de chercher à le rendre de plus en plus utile aux élèves et aux professeurs.

L'expérience que nous avons acquise, les conseils qui nous ont été donnés, les relations nombreuses que nous avons avec les membres de l'enseignement en France et à l'étranger, rendent pour l'avenir notre tâche facile. Cependant nous ne cesserons pas de stimuler le zèle de nos correspondants, tout en les remerciant de leur concours empressé, car c'est à eux qu'il appartient de nous faire connaître leurs besoins, leurs désirs et de nous indiquer les sujets à traiter dans notre recueil. Nous comptons sur leur active collaboration.

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 18218-7.

TABLE DES MATIÈRES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TOME I

Arithmétique et Algèbre.

Pages.
Note sur la racine carrée, par *M. Bourget*. 194
Question d'arithmétique . . 323
Démonstration d'un théorème d'algèbre sur le nombre des racines d'une équation, par *M. Rouché*. . . 131
Cubes égaux à la somme de trois ou quatre cubes, par *M. Rebout* 73
Principes élémentaires sur les déterminants, par *M. Bourget*. 5, 33
Application des déterminants, par *M. Bourget* 65, 97, 129
Produits de deux déterminants, par *M. Bourget* . . 193
Problème des courses, par *M. Cochez* 110
Idem par *M. Buguet*. . 112
Maxima et minima, par *M. Cochez* . . .74, 232, 261, 296
De l'involution, par *M. Vazeille* 132, 161
Sur un problème d'analyse combinatoire, par *M. Désiré André* 165
Démonstration d'un théorème d'algèbre par *M. Cochez*.
Décomposition des fractions en fractions simples. . . 332

Géométrie.

Pages.
Notions élémentaires sur les méthodes de démonstration en mathématiques et particulièrement en Géométrie, par *M. Bourget* . 37
Toute figure dont la projection stéréographique est elle-même un cercle sur la sphère, par *M. A. Morel*. 12
La surface d'un polygone étoilé régulier est égale au produit de son contour apparent par la moitié de son apothème, par *M. Lidy* . 13
Sur quelques perfectionnements à apporter dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, par *M. Bourget*. 15
Sur cet axiome : la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre, par *M. Bourget*. . 17
Construire un triangle dont les côtés passent respectivement par trois points donnés M, N, P, et soient divisés, en ces points, dans des rapports donnés, par *G*. 45
Problème de Pappus, par *M. A. Morel* 79
Propriétés nouvelles des po-

Pages.

lyèdres réguliers convexes par *M. Dostor*. . .134, 167, 229
Note de géométrie, par *M. Laudi*. 170
Théorie de l'inversion, par *M. Cochez* . 225, 257, 321, 353
Évaluation des angles et des surfaces des polygones égrediens, par *M. Dostor* 289, 324
Question de Géométrie, par *M. Bergson*. 300
Question sur l'ellipse, par *M. Cochez* 331
Plan bi-tangent au tore, par *M. Morel*. 335
Conseils relatifs à l'exécution des épures de géométrie descriptive, par *A. M.* 102
Épure de géométrie descriptive. — École navale, par *M. Bougueret*. 104
Épure de géométrie descriptive. — École spéciale militaire, par *M. Bougueret*. 181

Trigonométrie.

Problème du Myosotis, par *M. Dellac* 40
Réflexions sur les calculs numériques imposés aux élèves dans divers concours, par *M. Bourget* . . 68
Résolutions d'un triangle, 3e cas, par *J. B.* 108
Résolutions d'un triangle, 4e cas, par *J. B* 142
Disposition des calculs logarithmiques, par *J. B.* . 71
Règle mnémonique pour établir la théorie des signes en trigonométrie, par *M. Dostor* 357

Mécanique.

Détermination de la sensibilité d'une balance ordinaire, par *M. A. Morel* . 45
Même question, par *M. Colot*. 107
Note sur le centre de gravité du trapèze, par *M. Bezier* 204

Mélanges.

Avant-propos par *M. J. Bourget* 3
Histoire des mathématiques, par le *Dr Henri Suter*, de Zurich (traduction de *M. Melon*) . . 27, 56, 84, 346, 368
Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes, par *M. Hoüel*. . 118, 152, 187, 213

Bibliographie.

Les déterminants, par *Dostor* 159

Correspondance.

Relations entre les éléments d'un triangle, par *M. Bozet* 128
Lettre de *M. Hoüel* sur la géométrie. 64

Questions proposées.

1 à 16 30
17 à 26 62
27 à 34 95
35 à 44 126
45 à 52 223
53 à 61 255
62 à 68 288

Pages.
69 à 78 319
79 et 80 352
81 à 94 382

Concours divers.

Concours d'examen en 1876.

Ecole Polytechnique. . . . 20
Ecole normale supérieure 22
Ecole centrale. 23
Ecole forestière. 24
Ecole spéciale militaire . . 25
Ecole navale 26

Concours d'examen en 1877.

Ecole Polytechnique. . . . 212
Ecole normale supérieure . 207
Ecole centrale. . . . 238 et 344
Ecole forestière. 240
Ecole spéciale militaire . . 177
Ecole navale 211
Ecole des mineurs de Saint-Etienne 346

Concours généraux.

En 1873 et 1874. 317
En 1875 267
En 1876 49
En 1877 266
En 1854, 1855, 1856 364

Concours académiques.

Année 1877.

Aix 268
Bordeaux. 207
Caen. 182, 207
Clermont. 208
Dijon 208
Douai 209
Grenoble. 209
Lyon 210
Montpellier. 210
Nancy 210
Paris 211
Poitiers 211
Rennes 181
Toulouse. 241

Concours académiques.

Années antérieures à 1877.

Aix (1869-1876) 27, 367
Bordeaux (1874-1876). 151, 367
Caen (1874, 1875, 1876) . . 149
Clermont (1875) 50
Dijon (1869-1872-1874-1876). 150
Douai (1874-1876). . . . 81, 368
Grenoble (1875-1876) . 182, 207
Montpellier (1876) 183
Nancy (1876) 50
Poitiers (1875-1876) . . . 81
Rennes (1876). 50

Questions de mathématiques

Posées dans divers examens oraux.

École polytechnique. . . . 171
École spéciale militaire, 53, 83, 114, 138, 174, 199, 243 270
Questions pour les candidats à l'École centrale, 82-144, 184, 276, 287 337

Divers examens du Baccalauréat.

Bastia 53
Bordeaux (1877) 362
Clermont (1875-1876) . . . 53
Clermont (1877). 317
Lille (1877). 364
Paris (juillet 1876) 51
Paris (avril 1877). 205

Pages.
Paris (juillet 1877) 241
Paris (novembre 1877) . . 361
Poitiers (1874) 183
Divers 269
Questions de mathématiques posées dans des examens anglais 121
Questions proposées à l'École militaire de Belgique . . 183

Solution des questions proposées.

Question 1, par *M. Vautré*. 249
— 2, par *M. Thomassin*. 59
— 3, par *M. Bailly* . . 89
— 4, par *M. Canon* . . 372
— 5, par *M. Maggi* . . 90
— 6, par *M. Thomassin*. 60
— 7, par *M. Biette* . . 215
— 8, par *M. Long*. . . 154
— 9, par *M. Huc* . . . 60
— 10, par *M. Bernard*. 349
— 11, par *M. Biette* . . 91
— 12, par *M. Vautré* . 92
— 13, par *M. Joire* . . 61
— 14, par *M. Avidun* . 93
— 15, par *M. Jullidière*. 350
— 16, par *M. Biette* . . 93
— 17, par *M. Estienne*. 156
— 17, par *M. Vautré* . 157
— 18, par *M. Canon*. . 157
— 19, par *M. Jullidière*. 216
— 21, par *M. Demortain* 191
— 22, par *le même* . . 217
— 23, par *M. Biette*. . 250
— 24, par *M. Perrin* . 218
— 25, par *M. Picaud* . 190
— 25 (généralisée), par *M. Bergson* . . 219
— 26, par *M. Perrin*. . 124
— 27, par *M. Mahieux*. 311
Question 28, par *M. Vautré*. 220
— 29, par *le même*. . . 221
— 30, par *M. Tallavignes* 313
— 31, par *M. Cordeau*. 313
— 32, par *MM. Lynch* et *Woestyn* . . . 222
— 33, par *MM. Lynch et Woestyn* . . 251
— 34, par *M. Joire* . . 222
— 36, par *M. Biette*. . 251
— 37, par *M. Mahieux*. 252
— 40, par *M. Vautré* . 253
— 41, par *M. Bernaou*. 254
— 42, par *M. Richard* . 315
— 43, par *M. Canon*. . 314
— 47, par *M. Demortain* 350
— 48, par *le même* . . 351
— 49, par *le même* . . 374
— 50, par *le même* . . 376
— 51, par *M. Lauriol* . 375
— 52, par *M. Aubert* . 377
— 54, par *M. Boudin* . 380
— 68, par *M. Cordeau*. 381
Concours général, classe de 3me, par *M. Douliot*. . . 125
École spéciale militaire (Question 3) par *M. Nepveu* 122
Concours général de 1876, mathématiques élémentaires, par *M. Bernard* . 302
Concours général, classe de seconde, par *M. Ernst* . 303
Concours de Douai (1876), Solution par *M. Joire*. . 284
Concours de Dijon (1876), par *M. Demortain*. . . . 286
Concours académique de Rennes (1876), par *M. Lauriol*. 304
Concours académique de Poitiers, par *M. Perrin* . 310

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS.

André (Désiré), professeur, 165.
Arnoye, professeur au lycée de Montauban, 126, 255, 256.
Aubert, à Marseille, 220, 253, 377.
Aurenty, à Marseille, 91, 92, 192, 217, 221, 314.
Bailly, petit séminaire de Belley, 89, 93, 125.
Belin, à Semur, 221, 251, 314, 374, 377.
Bellamy, à Saint-Brieuc, 93, 159, 223, 312, 314, 316.
Bergson, au lycée Fontanes, 190, 300.
Beringuier, à Montauban, 91, 96, 222.
Bernaou, collége d'Épernay, 252, 254, 315.
Bernard, à Liége, 222, 302, 304, 314, 349.
Bezier, professeur au lycée de Nevers, 204.
Biette, au Havre, 91, 93, 96, 155, 157, 158, 159, 192, 215, 217, 218, 220, 221, 223, 250, 251, 253, 255, 303, 309, 314, 315, 316, 374, 377, 382.
Le Blondel, collége de Meaux, 192.
Bolandart, à Lons-le-Saulnier, 221, 314.
Boset, à Namur, 128.
Boudart, professeur à Toulon, 88.
Boudin, soldat au 31e de ligne, 380.
Bouffez, à Amiens, 91, 96.
Bougueret, professeur à l'École J.-B. Say, 104, 181.
Bourgeois, à Saint-Étienne, 222.
Bourget (J.), rédacteur, 3, 5, 15, 17, 33, 37, 65, 68, 71, 97, 108, 129, 142, 193, 194, 323.
Bozonet, à Belley, 96, 217.
Brice, à La Flèche, 220.
Brocot, 383.
Brot, école Lavoisier, 192.
Bruyand, de Troye, 352.
Buguet, élève à l'École normale supérieure, 112.
Canon, de l'Athénée royal de Liége, 155, 157, 221, 253, 303, 312, 314, 372.
Catalan, à Liége, 128.
Chanier, au lycée de Clermont, 125, 157, 158, 192.
Chastan, de Valence, 253.
Chenet, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne, 382.
Chossegros, au Puy, 222.
Clabé, à Mont-de-Marsan, 221, 253
Cochez, rédacteur, 74, 110, 225, 232, 257, 261, 296, 321, 331, 332, 353.
Codet, à La Flèche, 158.
Colardeau, à Charleville, 91, 314

Colot, 107.
Comandré, à Pau, 192, 218, 223, 314.
Contour, à Semur, 314.
Corbeau, à Saint-Quentin, 192.
Cordeau, école Lavoisier, 125, 313, 377, 380, 381.
Cousin, à Caen, 220.
Cuinet, à Bourg, 158, 218.
Delarue, lycée Fontanes, 125, 314.
Dellac, professeur au lycée de Marseille, 40, 255.
Demortain, école communale de Doullens, 158, 191, 217, 252, 286, 350, 351, 374, 375, 382.
Dessirier, de Dijon, 222.
Dostor, 95, 134, 159, 167, 229, 289, 324, 357.
Douliot, collége de Langres, 125.
Duflot, lycée Fontanes, 192, 314.
Ernst, élève du lycée Charlemagne, 303, 304.
Ernst, élève du lycée de Montauban, 159, 218.
Estienne, de Bar-le-Duc, 96, 156, 223, 312.
Everty, au collége Chaptal, 157, 192.
Florentin, à Saint-Brieuc, 90, 217, 221, 314.
Fougerolles, à Chambéry, 314.
Fouquoire, à Saint-Quentin, 192.
Garnier, de Nancy, 303.
Gautier, de Montpellier, 314.
Geri dè pazzi, de Fribourg, 96, 314.
G. 45.
Gilbert, à Orléans, 92.
Giros, à Nancy, 222.
Godin, de Saint-Quentin, 314.
Gouot, de Tonnerre, 255, 314.
Granger, de Périgueux, 93, 159, 221, 314.
Gravet, à Orléans, 159.
Grés du Loû (des), à Lorient, 159.
Gueldre (de), à Dinant (Belgique), 221, 255, 314.
Guerdon, de Lille, 96.
Hain (Emile), 288.
Haye, école normale de Chartres, 374.
Hallowell, 126.
Herouard, de Sainte-Barbe, 222.
Houel, professeur à la faculté de Bordeaux, 63, 118, 152, 187, 213.
Huc, élève du lycée de Saint-Omer, 60.
Hugentobler, école J.-B. Say, 125, 192, 352, 374.
Joire, lycée de Saint-Omer, 61, 125, 217, 222, 284.
Julliard, au lycée de Clermont, 126, 160, 256, 319, 384.
Julliaud, à Agen, 157, 158.
Jullidière, à Mont-de-Marsan, 159, 216, 253, 254, 315, 349.
Labro, à Saint-Quentin, 314.
Lainey, à Cherbourg, 125, 312.
Lambert, professeur au collége de Dinant, 160.
Landouzy, de Lille, 91, 93, 221, 222, 255, 312, 314.
Lantoine, de Saint-Omer, 314.
Laperrine d'Hautpoul, de Perpignan, 222.
Laudi, professeur, à la Realschule de Trieste (Autriche), 170.
Launoy, répétiteur au lycée de Lille, 255.
Lauriol, lycée d'Avignon, 304, 374, 375, 376.
Lecocq, de Liége, 221, 223, 314.